Физика: Методология на обучението **1** (2013) 5–8

Охлюв гони вързан кон – и го настига!

Христо Попов

Абстракт. Разгледан е дискретизиран вариант на следната класическа задача: *Единият край на безкрайно разтеглива лента е привързан за една стена, а другият – за кон. До стената върху лентата стои охлюв. В един момент конят и охлювът започват да се отдалечават от стената. Покажете, че охлювът ще настигне коня.* Показано е, че задачата може да бъде решена със средствата на елементарната математика.

Съществуват два варианта на една класическа задача, която поразява с мащабите на крайния резултат. Нейният по-разпространен – непрекъснат вариант, изисква решаване на обикновено линейно диференциално уравнение от първи ред. Другият, разгледан по-долу дискретизиран вариант*, може да се разглежда и с учащи се, проявяващи по-голям интерес към физиката.

Задача. *Кон е привързан за стена посредством еластична лента с дължина L. Свойствата на лентата са необичайни: нейният коефициент на еластичност е нула, така че конят може да я разтяга без усилие неограничено. В един момент от стената по лентата започва да пълзи охлюв с постоянна спрямо лентата скорост v. В края на първата секунда конят подскача и удвоява дължината на лентата, докато охлювът продължава да пълзи. В края на втората секунда конят отново подскача и увеличава дължината на лентата с още L, а пълзенето на охлюва продължава без промяна. Покажете, че, ако този процес продължи достатъчно дълго, охлювът ще възседне коня!*

Бележка : Ако с $\Delta t = 1$ s означим всеки от интервалите време, през които конят е неподвижен, очевидно задачата има смисъл само при условие, че е изпълнено неравенството $v\Delta t < L$. В обратния случай ще се окаже, че още през първата секунда охлювът достига коня.

Решение. Според условието на задачата в интервала от време между началото и края на n-тата секунда разстоянието между коня и стената е постоянно и

*Според Мартин Гарднер (вж. книгата му *Путешествие во времени*, Мир, Москва, 1990) този вариант е предложен от Д. Уилкин от Нова Каледония и е публикуван през 1972 г. във френското списание *Science et Vie*.

ISSN 1314–8478

равно на nL, а охлювът за това време пропълзява по лентата разстояние $v\Delta t$. Така през първата секунда охлювът изминава част от дължината на лентата, изразяваща се с дробта $\dfrac{v\Delta t}{L}$. През втората секунда дължината на лентата вече е $2L$, така че, движейки се със същата скорост, през втората секунда охлювът преодолява $\dfrac{v\Delta t}{2L}$-та част от новата дължина на лентата. По същия начин през третата секунда преодоляната част от общата дължина на лентата ще бъде $\dfrac{v\Delta t}{3L}$ и т.н.

Разсъждавайки по този начин, стигаме до извода, че в края на n-тата секунда охлювът е пропълзял $\dfrac{v\Delta t}{nL}$-та част от дължината на лентата. Ето защо, ако означим с μ_n общата пропълзяна за всичките n секунди част от разстоянието между охлюва и коня, то:

$$\mu_n = \frac{v\Delta t}{L} + \frac{v\Delta t}{2L} + \frac{v\Delta t}{3L} + \cdots + \frac{v\Delta t}{nL} = \frac{v\Delta t}{L}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\Big). \qquad (1)$$

Охлювът ще настигне коня, ако при някаква стойност на n се достигне равенство $\mu_n = 1$. В скобите на дясната страна на (1) фигурира изразът:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,. \qquad (2)$$

В математиката този израз се нарича *частична сума* на един безкраен ред, известен с името *хармоничен* ред. Известно е също така, че хармоничният ред е *разходящ*, т.е. с увеличаване на броя на събираемите в S_n, сумата им може да стане по-голяма от всяко предварително избрано число. В нашия случай това означава, че рано или късно стойността на S_n ще надмине числото $\dfrac{L}{v\Delta t}$ и следователно целият израз в лявата страна на (1) ще стане по-голям от единица. Разбира се, учениците не знаят нито какво е безкраен ред, нито че има сходящи и разходящи редове и че хармоничният ред е разходящ. Съществуват обаче достъпни за тях методи за доказателство на твърдението, че стойността на S_n може да стане произволно голяма. Един от тях, предложен от средновековния френски учен Никола Орем*, е следният.

Да означим с S стойността на израза (2) при $n = \infty$ и да направим следното групиране на неговите членове:

$$\begin{aligned} S =& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \\ =& 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{9} + ... \frac{1}{16}\right] + \cdots\ . \end{aligned}$$

*Орем (Nicolas Oresme) е френски учен, който дава тук изложеното доказателство около 1350 г., т.е. повече от четиридесет години преди турците да превземат Търново!

Ако след това направим знаменателите на събираемите във всяка скоба равни на последния най-голям знаменател в скобата, това със сигурност ще намали стойността на израза в скобата. Ето защо можем да запишем неравенството:

$$\begin{aligned} S =& 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots \\ >& 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots\ . \end{aligned}$$

Ясно е, че сумата от дробите във всяка скоба е $\frac{1}{2}$, така че получаваме:

$$S > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\ .$$

Очевидно е, че дясната страна на това неравенство е безкрайно голяма, което означава, че, ако в равенство (2) дадем достатъчно голяма стойност на n, S_n със сигурност ще стане по-голямо от $\dfrac{L}{v\Delta t}$, което означава, че след n секунди $\mu_n \geqslant 1$, т.е. охлювът ще настигне коня – което трябваше да се докаже.

Може да се очаква, че изложеното решение ще впечатли със своята достъпност и елегантност всеки учащ, който проявява интерес към физиката и цени строгите разсъждения.

Пример. За да стигнем до споменатия в началото поразяващ с мащабите си резултат, трябва да напуснем границите на елементарната математика и да разгледаме конкретен пример с реалистично подбрани стойности на параметрите, които участват в условието на задачата. Нека началната дължина на лентата е $L = 1$ m, а скоростта на охлюва е $v = 1$ mm/s. В този случай отношението, от което зависи кога охлювът ще настигне коня, е твърде голямо:

$$\frac{L}{v\Delta t} = \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{mm}} = 1000\,.$$

Оттук и от формула (1) следва, че броят n на секундите, след изтичане на които се достига равенството $\mu_n = 1$, се определя от уравнението:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = 1000\,. \tag{3}$$

Лесно се съобразява, че равенство (3) може да се достигне само при достатъчно голяма спрямо 1 стойност на n. Това дава възможност за частичната сума на хармоничния ред да се използва известната формула на Ойлер:

$$S_n \approx \ln n + \gamma, \tag{4}$$

където $\gamma = 0,5772...$ е т.нар. *константа на Ойлер*. При това положение броят n на секундите, след изтичане на които охлювът настига коня, се определя от равенството:

$$\ln n + \gamma = 1000\ . \tag{5}$$

В случай, че търсим оценка само на порядъците, можем да пренебрегнем γ спрямо 1000 и тогава, след антилогаритмуване на (5) получаваме, че времето, за което охлювът настига коня, е от порядъка на e^{1000} секунди. Ако изразим това число като 10 на определена степен, същият интервал време се оказва по-голям от 10^{400}. Много ли е това или малко, личи от сравнението на последното число с възрастта на Вселената, която няма и 10^{18} секунди. Дори ако охлювът е "по-бърз" и пълзи със скорост 1 cm/s, за да настигне коня, ще са му необходими повече от 10^{43} секунди – отново много повече от възрастта на Вселената. Тъй като *средната* скорост на коня е 1 m/s (той се движи на подскоци!), дължината на лентата към момента на настигането ще бъде над 10^{43} m! А това означава, че лентата трябва да излезе далеч извън пределите на днешната Вселена, чиито размери не надминават 10^{24} m.

И по-нататък...

1. В началото на движението скоростта на охлюва спрямо земята е очевидно по-малка от средната скорост на коня. Щом обаче охлювът все пак настига коня, трябва да съществува момент, в който двете средни скорости се изравняват и след който момент вече охлювът се движи (спрямо земята!) по-бързо от коня. Любителите на пресмятания може да потърсят в кой момент и на какво разстояние от стената абсолютните скорости на коня и на охлюва се изравняват.
2. Помислете дали отговор на въпроса, ще настигне или няма да настигне охлювът коня, може да се търси на чисто качествено равнище, без да се прибягва до споменаване на безкрайни редове, сходимости и пр.

A Snail Chasing and Catching a Horse

Ch. Popov

Abstract: A discrete variant of the following classical problem is considered: *One of the edges of an infinitely stretchable rubber band is attached to a wall, the other one – to a horse. On the rubber band, near the wall there is a snail. Both the snail and the horse start moving. Show that the snail will reach the horse*. It is shown, that it can be solved by means of elementary mathematics.