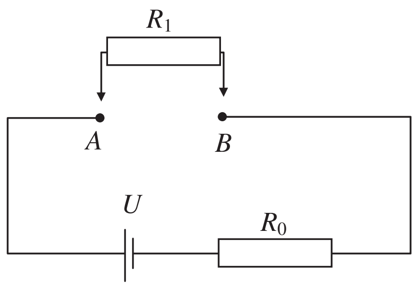
Физика: Методология на обучението **1** (2013) 48–72

Национално пролетно състезание по физика, Шумен, 11.04.2012

Тема за 7. клас

Съставители: Виктор Иванов, Мирослав Абрашев

Задача 1. *Електрическа запалка*
На Фиг. 1 е показана схема на електрическата запалка на автомобила. Контактите на запалката са в точките A и B. Единият контакт е свързан към акумулатора на автомобила през резистор с неизвестно съпротивление R_0. Напрежението на акумулатора е $U = 12$ V. Съпротивлението на запалката (електрически нагревател) е $R_1 = 1\ \Omega$.



Фиг. 1.

А) Ако вместо запалката, между точките A и B бъде свързана електрическа прахосмукачка със съпротивление $R_2 = 4\ \Omega$, в нея се отделя същата мощност, както в запалката. Колко е отношението $\dfrac{I_1}{I_2}$ на токовете, които текат съответно през запалката и през прахосмукачката. **(3т)**

Б) Колко е съпротивлението на резистора R_0? **(4т)**

В) Колко е мощността P на прахосмукачката? **(2т)**

Г) Да предположим, че запалката и прахосмукачката са свързани успоредно към контактите A и B. Запишете в листата с решението кое от следните твърдения е вярно.

1) Двата уреда ще работят със същите мощности, с които биха работили поотделно.

2) Двата уреда ще работят с по-малки мощности, отколкото биха работили поотделно.

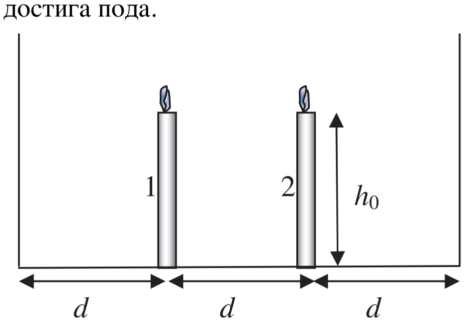
3) Двата уреда ще работят с по-големи мощности, отколкото биха работили поотделно.

4) Мощността на запалката ще се увеличи, а на прахосмукачката – ще намалее.

5) Мощността на запалката ще намалее, а на прахосмукачката – ще се увеличи.

Обосновка на отговора не е нужна **(1т)**

Задача 2. *Вечеря на свещи*
Две свещи с еднакви начални височини $h_0 = 30$ cm са поставени върху пода на стаята на еднакви разстояния d от стените, както е показано на Фиг. 2. Разстоянието между свещите също е равно на d. Свещите са запалени едновременно, но горят с различни скорости, защото са изработени от различни сортове восък. Оказало се, че сянката, която хвърля свещта 2 върху дясната стена, не променя височината си. За време $t = 40$ min обаче сянката, която хвърля свещта 1 върху лявата стена, достига пода.



Фиг. 2.

ISSN 1314–8478 © 2013 Heron Press Ltd.

А) Изобразете на чертеж двете свещи и техните сенки в момента $t = 40$ min. Кой физичен закон използвахте, за да направите чертежа? **(2т)**

Б) Колко са височините h_1 и h_2 на свещите в този момент? **(4т)**

В) За какви интервали от време t_1 и t_2, след като са били запалени, свещите 1 и 2 ще изгорят напълно? **(4т)**

Задача 3. *Козметично огледало*
Суетна ученичка разглежда очите си в козметично огледало и забелязва, че изглеждат два пъти по-големи, отколкото са в действителност. Очите на ученичката са на разстояние $a = 10$ cm от огледалото.

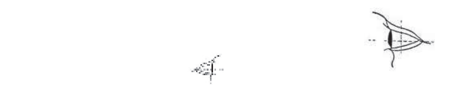
А) Какъв тип е огледалото – вдлъбнато или изпъкнало? Обяснете! **(2т)**

Б) На какво разстояние b се намира образът на очите ѝ от огледалото? **(2т)**

В) Колко е фокусното разстояние f на огледалото? **(1т)**

Г) Колко е радиусът r на огледалото? **(1т)**

Д) На Фиг. 3 са дадени положенията на едното око на ученичката, неговият образ и главната оптична ос на огледалото. Намерете с геометрични построения, като ги начертаете и опишете тяхната последователност, положенията на оптичния център O на огледалото, върха M на огледалото (точката, в която главната оптична ос пресича огледалото) и неговия фокус F. **(4т)**



Фиг. 3.

Решения на темата за 7. клас

Задача 1. *Електрическа запалка*

А) От условието на задачата и от закона на Джаул-Ленц следва:

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2. \qquad \textbf{(1т)}$$

Следователно

$$\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 = \frac{R_2}{R_1} = 4. \qquad \textbf{(1т)}$$

Така намираме, че търсеното отношение е:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2. \qquad \textbf{(1т)}$$

Б) Когато между контактите е свързана запалка, еквивалентното съпротивление на веригата е

$$R = R_1 + R_0 \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а токът във веригата:

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_0}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Аналогично, когато във веригата е свързана прахосмукачка, токът във веригата е:

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + R_0}. \qquad \textbf{(1т)}$$

От получения в т. А резултат намираме:

$$\frac{R_2 + R_0}{R_1 + R_0} = 2. \qquad \textbf{(1т)}$$

Решаваме уравнението спрямо R_0:

$$R_2 + R_0 = 2R_1 + 2R_0,$$

откъдето намираме:

$$R_0 = R_2 - 2R_1 = 2\,\Omega \qquad \textbf{(1т)}$$

В) Като използваме израза за тока I_2 от т. Б, пресмятаме:

$$I_2 = \frac{12\ \mathrm{V}}{4\,\Omega + 2\,\Omega} = 2\ \mathrm{A} \qquad \textbf{(1т)}$$

От закона на Джаул-Ленц, намираме:

$$P = I_2^2 R_2 = (2\ \mathrm{A})^2 \cdot 4\ \Omega = 16\ \mathrm{W}. \quad \textbf{(1т)}$$

Г) Верен е отговорът 2) "Двата уреда ще работят с по-малки мощности, отколкото биха работили поотделно". **(1т)**

Когато уредите са свързани успоредно, тяхното еквивалентно съпротивление е по-малко от съпротивлениеята им, взети поотделно. Това означава, че когато са свързани последователно към резистора R_0, напрежението върху тях ще бъде по-малко, отколкото когато работят поотделно.

Задача 2. *Вечеря на свещи*

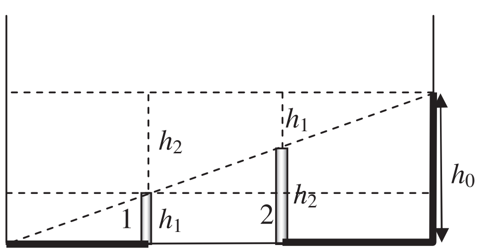
А) Използва се законът за праволинейно разпространение на светлината. **(1т)**

В момента $t = 40$ min положението на свещите и на техните сенки е показано на фигурата. Оценяват се следните елементи на чертежа:

- Краищата на сенките и на свещите лежат на една права. **(0,5т)**
- Височината на свещта 2 е два пъти по-голяма от височината на свещта 1. **(0,5т)**

Б) От чертежа следва, че:

$$h_1 + h_2 = h_0 \qquad \textbf{(1т)}$$
$$h_2 = 2h_1. \qquad \textbf{(1т)}$$



Следователно:

$$h_1 = 10\ \text{cm}; \qquad \textbf{(1т)}$$
$$h_2 = 20\ \text{cm}. \qquad \textbf{(1т)}$$

В) За време t от свещта 1 изгаря дължина:

$$s_1 = h_0 - h_1 = 20\ \text{cm}, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а от свещта 2:

$$s_2 = h_0 - h_2 = 10\ \text{cm} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Следователно свещта 1 гори със скорост:

$$v_1 = \frac{s_1}{t} = 0,5\ \text{cm/min}, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а свещта 2:

$$v_2 = \frac{s_2}{t} = 0,25\ \text{cm/min}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Следователно свещите ще изгорят съответно за времена:

$$t_1 = \frac{h_0}{v_1} = 60\ \text{min} = 1\ \text{h}, \qquad \textbf{(1 т)}$$
$$t_2 = \frac{h_0}{v_2} = 120\ \text{min} = 2\ \text{h}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 3. *Козметично огледало*

А) Огледалото е вдлъбнато, защото изпъкналите огледала винаги дават умален образ. **(2т)**

Б) Нека $AH \perp X_1X_2$ и $BC \perp X_1X_2$. По условие $HM = a$, $MC = b$ и $BC = 2AH$. Следователно, ако построим права, минаваща през т. A и успоредна на X_1X_2, тя ще пресича BC в т. E, като $BE = EC$. Лъч, падащ перпендикулярно на огледалото, след отражение ще премине през оптичния център O. Следователно точките O, A и B лежат на една права. Тогава триъгълниците OHA и AEB са еднакви и $OH = AE = HC$. Така, за радиус r на огледалото получаваме

$$\begin{aligned} r &= OM = OH + HM \\ &= HC + HM = a + b + a = 2a + b. \end{aligned}$$

Лъчът AG, след отражение от огледалото, преминава през фокуса F. Потеже триъгълниците FMG и GEB са еднакви, то $f = FM = GE = MC = b$. Тъй като за огледалата $r = 2f$, получаваме, че $2a + b = 2b$, следователно

$$b = 2a = 20 \text{ cm}. \qquad \textbf{(2т)}$$

В) Фокусното разстояние f на огледалото е $f = b = 20$ cm. **(1т)**

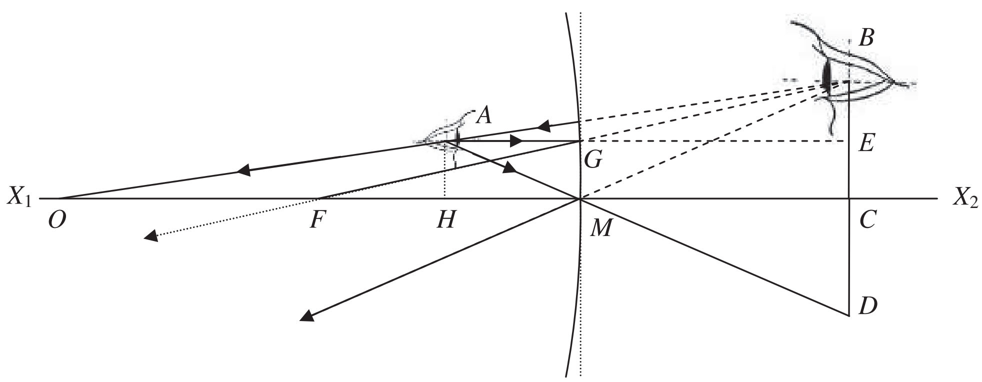
Г) Радиусът r на огледалото е $r = 2f = 40$ cm. **(1т)**

Д) Определяме положенията на оптичния център O на огледалото, върха M на огледалото (точката, в която главната оптична ос пресича огледалото) и неговия фокус F чрез следните построения:

1. Построяваме правата AB. Тя пресича X_1X_2 в т. O – оптичния център. **(1т)**

2. Построяваме т. D, огледална на т. B спрямо X_1X_2. Построяваме правата AD. Нека тя пресича X_1X_2 в т. M. Тъй като триъгълниците MCD и MCB са еднакви, то правите AD и BM сключват равни ъгли с X_1X_2. Следователно т. M е връх на огледалото. **(2т)**

3. Фокусът F може да се построи по два начина – или като среда на отсечката OM, или като пресечна точка на правата BG с X_1X_2. **(1т)**



Тема за 8. клас

Съставител: Димитър Мърваков

Задача 1. Локомотив с маса $M = 50$ t тегли вагон с маса $m = 20$ t по хоризонтален път с постоянна скорост. В определен момент вагонът се откачва от локомотива и изминава до спирането си разстояние $l = 50$ m.

а) Намерете отношението $\dfrac{a_1}{a_2}$, където a_1 е ускорението на локомотива след откачване на вагона, а a_2 – ускорението на вагона.

б) Какво разстояние ще измине локомотивът за времето от откачването на вагона до спирането му?

Приемете, че силата на тягата F при работа на локомотива е постоянна и че при движението действа постоянна сила на съпротивление f (триене и съпротивление на въздуха).

Задача 2. Плътността на дървен материал може да се определи по следния начин. Претегля се дървено парче във въздух като теглото му е $P_1 = 3$ N. След това се претегля във въздух парче олово, което се оказва, че тежи $P_2 = 12$ N. Двете тела се закрепват едно за друго, закачват се на силомер и се потапят изцяло във вода. Показанието на силомера е $P = 8$ N. Намерете плътността ρ_1 на дървения материал, ако плътността на водата е $\rho_0 = 1$ g/cm^3, а на оловото – $\rho_2 = 11,3$ g/cm^3.

Задача 3 . В първия от три цилиндрични съда с вода се пуска кубче чист лед, във втория – кубче лед със замразено в него дървено топче, а в третия – кубче лед със замразено в него желязно топче. И трите кубчета плават във водата частично потопени. Как ще се измени нивото на водата във всеки от цилиндричните съдове, след като ледът се разтопи – ще се повиши, няма да се измени, ще се понижи? Обосновете отговора си.

Забележка. Всяка задача се оценява максимално с **10 точки.**

Решения на темата за 8. клас

Задача 1.

а) Когато локомотивът и вагонът са в композиция на тях им действат следните сили:

1. на локомотива – силата на тягата F и противоположно насочените на нея сила на съпротивление f_1 и сила T_1, с която вагонът дърпа локомотива; **(1т)**
2. на вагона – силата T_2, с която локомотивът дърпа вагона, и силата на съпротивление f_2. **(1т)**

По третия принцип на Нютон имаме

$$T_1 = T_2 = T. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Тъй като композицията се движи с постоянна скорост

$$F - f_1 = T, \qquad \textbf{(0,5т)}$$
$$T = f_2. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

След отделянето на вагона локомотивът се движи под действие на силата $F - f_1$ и

$$Ma_1 = F - f_1 = T, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а вагонът – под действие на силата f_2, и

$$ma_2 = f_2 = T. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

От последните две равенства получаваме

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{M} = 0,4. \qquad \textbf{(1,5т)}$$

б) За да определим изминатия от локомотива път L ще приемем, че скоростта на композицията е v. След откачането от локомотива, вагонът спира за време

$$t = \frac{v}{a_2}. \qquad \textbf{(1т)}$$

След откачването на вагона, локомотивът се движи равноускорително с начална скорост v и за време t изминава път

$$L = vt + \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{v^2}{2a_2}\left(2 + \frac{a_1}{a_2}\right), \qquad \textbf{(1,5т)}$$
$$L = l\left(2 + \frac{m}{M}\right) = 120 \text{ m}. \qquad \textbf{(1,5т)}$$

Задача 2 . При потапяне на съставното тяло показанието на силомера е

$$P = P_1 + P_2 - F_A, \qquad \textbf{(2т)}$$

където Архимедовата сила, действаща на съставното тяло, е

$$F_A = \rho_0 g(V_1 + V_2). \qquad \textbf{(1т)}$$

Тук V_1 е обемът на дървеното парче, V_2 – на оловното.

Като отчетем, че

$$V_1 g = \frac{P_1}{\rho_1}, \qquad \textbf{(1т)}$$

$$V_2 g = \frac{P_2}{\rho_2}, \qquad \textbf{(1т)}$$

получаваме

$$P = P_1 + P_2 - \rho_0\Big(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{P_2}{\rho_2}\Big). \qquad \textbf{(1,5т)}$$

След преобразуване на този израз за плътността на дървото получаваме

$$\rho_1 = \frac{P_1}{P_1 - P + \Big(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho_2}\Big)P_2}\rho_0, \qquad \textbf{(2,5т)}$$

$$\rho_1 \approx 0,5\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 3 .

В първия случай изместената вода от потопената част на кубчето лед има маса m_1, равна на масата на леда (кубчето лед плава). **(1т)**

След разтапянето на леда ще се получи вода с маса m_1. **(1т)**
Следователно нивото на водата след разтапянето на леда няма да се промени. **(1т)**

Във втория случай изместената вода от потопената част на кубчето лед със замръзнало в него дървено топче има маса $m_2 = m_0 + m$, където m_0 е масата на леда, а m – масата на дървеното топче. **(1т)**

След разтопяването на леда ще се получи вода с маса m_0, **(1т)**
а дървеното топче ще плава. То ще измества вода с маса, равна на m. **(1т)**

Следователно нивото на водата няма да се промени. **(1т)**

В третия случай изместената вода от потопената част на кубчето лед със замръзнало в него желязно топче има маса $m_3 = \mu_0 + \mu$, където μ_0 е масата на леда, а μ – масата на желязното топче. **(1т)**

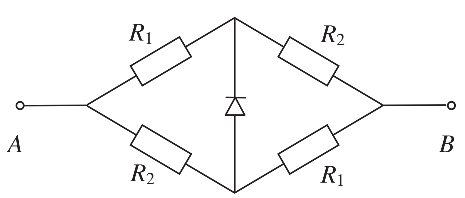
След разтопяването на леда ще се получи вода с маса μ_0, **(1т)**
а желязното топче ще потъне. То ще измества вода с маса, по-малка от μ, тъй като плътността на водата е по-малка от плътността на желязото. **(1т)**

Следователно нивото на водата ще се понижи. **(1т)**

Тема за 9. клас

Съставител: Димитър Мърваков

Задача 1. На схемата, показана на Фиг. 1, се подава напрежение U от източник, като първия път точката A се свързва към положителния полюс на източника, а при втория път – точката B. Диодът в схемата да се разглежда като идеален и $R_1 = 3r$, $R_2 = 2r$.



Фиг. 1.

а) Начертайте еквивалетните схеми при двата начина на свързване. **(2т)**

б) Намерете отношението $\dfrac{P_1}{P_2}$, където P_1 е мощността на консуматорите във веригата при първия начин на свързване, а P_2 – при втория. **(3т)**

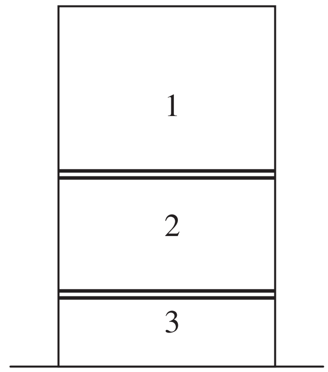
в) На колко е равен токът I_0, който протича през идеалния диод, ако $U = 12$ V, $r = 10\ \Omega$. **(5т)**

Задача 2. Две метални заредени топчета всяко с маса m и електричен заряд q са нанизани на дълга хоризонтална изолирана спица и са свързани чрез нишка с дължина l. Нишката се прегаря и топчетата започват да се движат с триене по спицата.

а) Опишете качествено (без формули) движението на топчетата. **(4т)**

б) Намерете максималната скорост, която достигат топчетата, ако коефициентът на триене при движението на топчетата е μ, земното ускорение е g, а константата в закона на Кулон е k. **(6т)**

Задача 3. Във вертикален затворен цилиндър има две еднакви тежки бутала, които се движат без триене. Частите на съда 1, 2 и 3, които са разделени от буталата, съдържат по еднакво количество газ, който може да се разглежда като идеален (Фиг. 2). При температура T, еднаква за всички части на съда, отношението на обемите е $V_1 : V_2 : V_3 = 5 : 3 : 1$. Когато температурата на всички газове в цилиндъра се промени на T', новото отношение на обемите е $V_1' : V_2' : V_3' = x : 2 : 1$. Определете стойността на x. **(10т)**



Фиг. 2.

Решения и указания за оценяване 9. клас

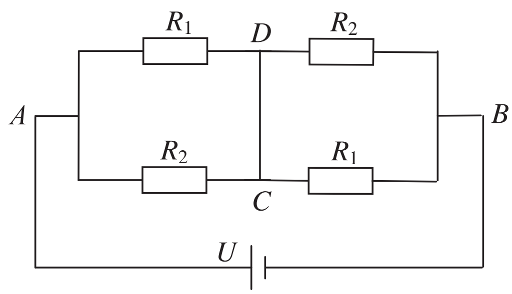
Задача 1.

а) При единия начин на свързване през диода протича ток и той е отпушен, а при другия начин на свързване – диодът е запушен. За да определим как е подадено напрежението във всеки един от случаите, ще предположим, че диодът е запушен, т.е. веригата между т. C и т. D е прекъсната. Електричният потенциал φ_C трябва да е по-малък от потенциала φ_D. При условие, че $R_1 > R_2$, положителният полюс на източника трябва да се свърже към т. B. **(1т)**

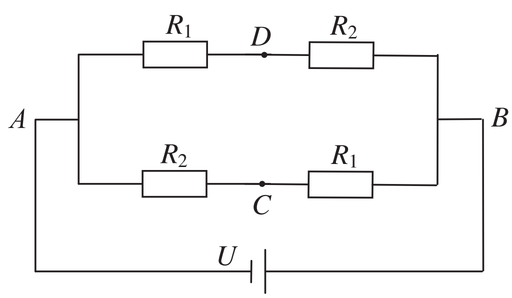
Еквивалентните схеми са показани на:

Фиг. 1а (отпушен диод); **(0,5т)**

Фиг. 1б (запушен диод) **(0,5т)**



Фиг. 1. а



Фиг. 1. б

б) Когато диодът е отпушен $\varphi_C = \varphi_D$, еквивалентното съпротивление е

$$R' = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

и консумираната мощност е

$$P_1 = \frac{U^2}{R'} = \frac{U^2(R_1+R_2)}{2R_1R_2}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

При запушен диод еквивалентното съпротивление е

$$R'' = \frac{R_1+R_2}{2} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

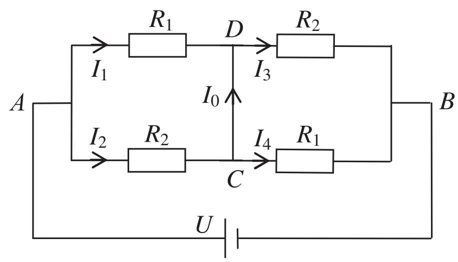
и консумираната мощност е

$$P_2 = \frac{U^2}{R''} = \frac{2U^2}{R_1+R_2}, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

откъдето намираме

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R_2} = \frac{25}{24}. \qquad \textbf{(1т)}$$

в) Токовете през съпротивленията и диода са означени на Фиг. 2.



Фиг. 2.

От закона за запазване на електричния заряд следва

$$I_3 = I_1 + I_0, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$I_4 = I_2 - I_0 = \frac{3}{2}I_1 - I_0, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

където е отчетено, че $I_1R_1 = I_2R_2$, **(0,5т)**
т.е. $3I_1 = 2I_2$. **(0,5т)**

Тъй като имаме

$$I_1R_1 + I_3R_2 = I_2R_2 + I_4R_1 = U, \qquad \textbf{(1т)}$$

от първото равенство намираме връзката

$$I_1 = 2I_0, \qquad \textbf{(1т)}$$

а от второто следва, че токът през диода е

$$I_0 = \frac{U}{12r} = 0,1\ \text{A}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 2.

а) Всяко топче се движи под действие на две сили – електричната сила F, която намалява по големина с увеличаване на разстоянието между топчетата и силата на триене f, която е постоянна **(1т)**.

В момента на прегаряне на нишката $F > f$ и топчетата се движат, като скоростта им се увеличава. **(1т)**

При $F = f$ скоростта им достига максимална стойност. **(1т)**

След този момент имаме $F < f$ и топчетата се движат закъснително, като скоростта им намалява постепенно, докато спрат. **(1т)**

б) Скоростта v е максимална, когато разстоянието между топчетата е r и е изпълнено условието

$$\mu mg = \frac{kq^2}{r^2}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Началната енергия на системата от двете топчета е

$$E_1 = \frac{kq^2}{l}, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а когато те се намират на разстояние r –

$$E_2 = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{r}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Изменението на енергията на топчетата $\Delta E = E_2 - E_1$ е равно на работата A_f, извършена от силата на триене

$$A_f = -\mu mg(r-l). \qquad \textbf{(1т)}$$

Тогава намираме

$$v^2 = \left(\frac{kq^2}{mlr} - \mu mg\right)(r-l) = \frac{\mu g}{l}(r-l)^2, \qquad \textbf{(1т)}$$

откъдето следва

$$v = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}(r-l) = q\sqrt{\frac{k}{ml}} - \sqrt{\mu g l}. \quad \textbf{(2т)}$$

Задача 3.

а) От уравнението на състояние на идеалния газ, приложено за всяка част на съда имаме (количествата газ са еднакви)

$$p_1V_1 = p_2V_2 = p_3V_3 = BT, \qquad \textbf{(1,5т)}$$
$$p_1'V_1' = p_2'V_2' = p_3'V_3' = BT'. \qquad \textbf{(1,5т)}$$

От условията за равновесие на буталата намираме

$$p_2 - p_1 = p_2' - p_1' = \frac{mg}{s}, \qquad \textbf{(1т)}$$
$$p_3 - p_2 = p_3' - p_2' = \frac{mg}{s},$$
$$\text{или} \quad p_3 - p_1 = p_3' - p_1' = \frac{2mg}{s}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Тъй като

$$p_2 = \frac{V_1}{V_2}p_1 = \frac{5}{3}p_1, \qquad \textbf{(0,5т)}$$
$$p_2' = \frac{V_1'}{V_2'}p_1' = \frac{x}{2}p_1' \qquad \textbf{(0,5т)}$$
$$p_3 = \frac{V_1}{V_3}p_1 = 5p_1, \qquad \textbf{(0,5т)}$$
$$p_3' = \frac{V_1'}{V_3'}p_1' = xp_1', \qquad \textbf{(0,5т)}$$

след заместване в условията за равновесие на буталата намираме

$$p_1\left(\frac{5}{3} - 1\right) = p_1'\left(\frac{x}{2} - 1\right), \qquad \textbf{(1т)}$$
$$p_1(5-1) = p_1'(x-1). \qquad \textbf{(1т)}$$

След почленно делене на равенствата имаме

$$\frac{1}{3} = \frac{x-2}{x-1}, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

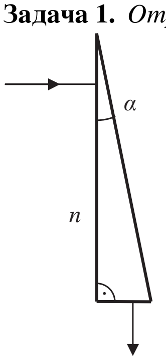
откъдето намираме

$$x = \frac{5}{2}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Тема за 10. клас

Съставител: Цветан Иванов

Задача 1. *Отражения в призма*



Светлинен лъч пада перпендикулярно на една от стените на правоъгълна стъклена призма (вж. фигурата). Ъгълът между стените на призмата е α. Показателят на пречупване на стъклото е $n = 1,5$. След общо девет вътрешни отражения от стените на призмата, лъчът излиза от нея перпендикуярно на основата ѝ.

а) Колко градуса е ъгълът α? **(5т)]**

б) Колко от вътрешните отражения са пълни вътрешни отражения? **(3т)**

в) Колко други лъчи излизат от предната и задната стени на призмата? **(2т)**

Задача 2. *Махало в кондензатор*

Във въздушното пространство между плочите на плоскопаралелен кондензатор, разстоянието между които е d, е поставено топче с маса m и заряд q, окачено на нишка с дължина l. Кондензаторът е зареден до напрежение U чрез батерия и след това е разкачен от нея. Влиянието на заряда на топчето върху електричното поле на кондензатора и гравитацията могат да се пренебрегнат.

а) Определете периода на трептене на така формираното махало при малко отклонение от равновесното му положение. **(4т)**

б) Как ще се промени периодът на махалото, ако разстоянието между плочите на кондензатора се намали два пъти? **(4т)**

в) Как ще се промени периодът на махалото, ако разстоянието между плочите на кондензатора се увеличи двойно, като той през цялото време остава свързан с батерията? **(2т)**

Задача 3. *Лидар*

"Лидар" е лазерна система за определяне на разстояния и скорости на отдалечени обекти. Неподвижен лидар излъчва поредица от няколко кратки светлинни импулса, следващи през равни интервали от време Δt_0 един след друг. Импулсите се отразяват от обект, който се приближава със скорост v към лидара и се връщат обратно в мястото на излъчване, където се регистрират от фотоприемник.

А) Първият отразен импулс е регистриран за време t, след като е бил излъчен. Получете израз за разстоянието L от лидара до обекта в момента на приемане на импулса. **(4т)**

Б) Получете израз за интервала от време Δt, през който приемникът регистрира отразените импулси. **(4т)**

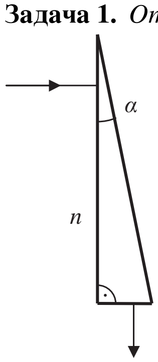
В) Любители-търсачи на извънземен разум се снабдили с лидар, излъчващ импулси през интервали време $\Delta t_0 = 2,5$ ns към открития Космос. Една вечер те установили, че излъчените импулси се връщат обратно след време $t = 5$ min, като следват през интервали $\Delta t = 2,0$ ns. Ако импулсите се отразяват от извънземен космически кораб, колко време след приемането на импулсите корабът ще достигне Земята? **(2т)**

Скорост на светлината във вакуум:

$$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Решения на темата за 10. клас

Задача 1. *Отражения в призма*



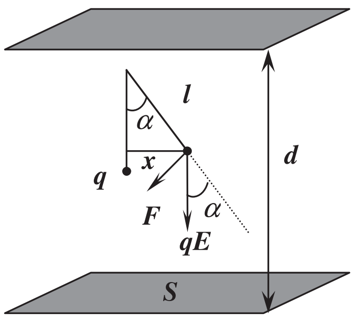
а) Ъгълът на падане върху задната стена за първото отражение е α **(0,5т)**, ъгълът на падане върху предната стена за второто отражение е 2α **(0,5т)**, ..., ъгълът на падане върху задната стена за деветото отражение е 9α **(1т)**. Тъй като нормалата на задната стена сключва ъгъл α с хоризонталата, то след деветото отражение отразения лъч ще е вертикален, ако $9\alpha + \alpha = 90°$, следователно $\alpha = 9°$ **(3т)**.

б) За да има пълно вътрешно отражение, ъгълът на падане $\varphi \geqslant \varphi_{\text{пво}}$ **(0,5т)**, или $\sin\varphi \geqslant \sin\varphi_{\text{пво}} = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ **(1т)**. Следователно $\varphi \geqslant 41.8°$. Това означава, че $4\alpha < \varphi_{\text{пво}} < 5\alpha$ **(0,5т)**. Следователно първите 4 отражения не са пълни, а следващите 5 – пълни **(1т)**.

в) Тъй като лъчите последователно се отразяват от задната и предната стена, то два лъча ще излизат от задната стена (от местата на първото и третото отражение) и два лъча ще излизат от предната стена (от местата на второто и четвъртото отражение) **(2т)**

Задача 2. *Махало в кондензатор*

а) При отклонение на малък ъгъл α връщащата сила е $F = -qE\sin\alpha$, където $E = \dfrac{U}{d}$ е интензитетът на електричното поле между плочите на кондензатора.



Фиг. 3.

Отклонението от равновесие може да се изрази като $x = l\sin\alpha$ (вж. Фиг. 3). От общия вид на квазиеластичната сила $F = -kx$ определяме коефициента $k = \dfrac{qU}{ld}$. За периода на малки трептения около равновесното положение получаваме

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mdl}{qU}}\ . \qquad \textbf{(4т)}$$

б) Тъй като кондензаторът е разкачен от източника на напрежение, при промяна на разстоянието между плочите му се мени напрежението между клемите на кондензатора, а натрупаният върху него заряд Q се запазва **(1т)**. Нека $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ е капацитетът на кондензатора, където S е площта на плочите му, а ε_0 – диелектричната проницаемост на вакуума. Следователно $U = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}$ и за периодът получаваме

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mdl\varepsilon_0 S}{qQd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml\varepsilon_0 S}{qQ}}\ ,$$

което показва че той не зависи от d и няма да се промени в този случай **(3т)**.

в) При постоянно свързан кондензатор към батерията, напрежението върху него остава постоянно. Като отчетем, че $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mdl}{qU}}$, при двойно увеличение на d той ще се увеличи $\sqrt{2}$ пъти **(2т)**.

Задача 3. *Лидар*

А) До момента на отразяването си от обекта светлинният импулс се е движил време:

$$t_1 = \frac{t}{2} \qquad \textbf{(1т)}$$

и се е върнал до приемника за същото време. Следователно в момента на отразяване на импулса обектът се е намирал на разстояние:

$$L_1 = \frac{ct}{2}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Докато отразеният сигнал достигне приемника, обектът изминава разстояние:

$$s = \frac{vt}{2}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Следователно, в момента на приемане на сигнала обектът се намира на разстояние:

$$L = L_1 - s = \frac{(c-v)t}{2}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Б) Избираме като начален ($t = 0$) момента на излъчване на първия импулс. В момента t_1 на приемане на първия импулс обектът се намира на разстояние:

$$L_1 = \frac{(c-v)t_1}{2}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Ако вторият импулс е приет в момента t_2, реалното му време на движение е

$t_2-\Delta t_0$, защото е излъчен с време Δt_0 по-късно. Следователно в момента на приемане на втория импулс обектът се намира на разстояние:

$$L_2 = \frac{(c-v)(t_2-\Delta t_0)}{2} \,. \qquad \textbf{(1т)}$$

От друга страна, преместването на обекта за интервала $\Delta t = t_2 - t_1$ е:

$$s = L_1 - L_2 = v\Delta t. \qquad \textbf{(1т)}$$

Така получаваме уравнението:

$$v\Delta t = \frac{(c-v)(\Delta t_0 - \Delta t)}{2} \,,$$

от което определяме:

$$\Delta t = \frac{(c-v)}{(c+v)}\Delta t_0. \qquad \textbf{(1т)}$$

В) От получения в т. Б резултат намираме скоростта на космическия кораб:

$$v = c\frac{(\Delta t_0 - \Delta t)}{(\Delta t_0 + \Delta t)} = \frac{c}{9} \,. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

В момента на приемане на първия отразен импулс корабът се намира на разстояние:

$$L = \frac{(c-v)t}{2} = \frac{4}{9}ct \qquad \textbf{(0,5т)}$$

от Земята и ще я достигне след време:

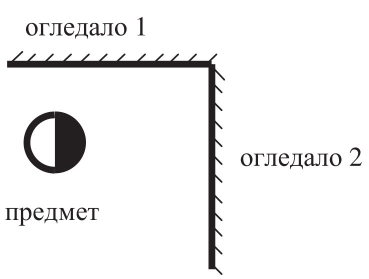
$$t_1 = \frac{L}{v} = 4t = 20 \text{ min}\,. \qquad \textbf{(1т)}$$

Тема за 11. и 12. клас

Съставител: Андон Рангелов

Задача 1. *Двойно огледало* (трите части са независими)

Част 1. Предмет се намира между две огледала, които сключват прав ъгъл (Фиг. 1а). Отговорете на следните въпроси, като подкрепите отговорите си с чертежи.

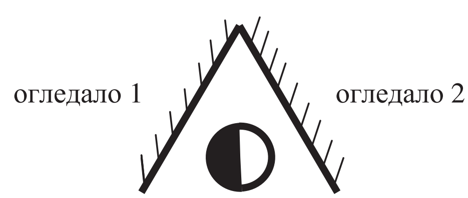


Фиг. 1а.

а) Колко образа ще се наблюдават в огледалата? **(1т)**

б) Ако Вие се оглеждате в тези огледала, опишете образа, който се образува в ъгъла, съставен от тези две огледала. Къде е лявата Ви ръка за този образ? **(2т)**

Част 2. Предмет се намира между две огледала, които сключват ъгъл 60° едно спрямо друго (Фиг. 1б). Отговорете на следните въпроси, като подкрепите отговорите си с чертежи.



Фиг. 1б.

в) Колко образа ще се наблюдават в огледалата? **(2т)**

г) Ако Вие се оглеждате в тези огледала, опишете образа, който се образува в ъгъла, съставен от тези две огледала. Къде е лявата Ви ръка за този образ?**(2т)**

Упътване: За решаването на горните две части можете да си помогнете като построите образите на предметите, показани на Фиг. 1а и Фиг. 1б.

Част 3. Намирате се по средата между две успоредни огледала на разстояние L едно от друго.

д) Колко образа виждате в огледалата? **(1т)**

е) На какво разстояние от Вас се намира третият най-близък образ? **(2т)**

Задача 2. *Тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта*

Тяло е хвърлено с начална скорост v_0 под ъгъл α спрямо хоризонта от място с нулева височина.

а) Ако оста x на една координатна система (чието начало съвпада с мястото на хвърляне) е хоризонтална, а оста y е вертикална, то намерете уравнението на траекторията $y(x)$ на тялото. **(3т)**

б) ако на разстояние $L = 0,200$ m от мястото на хвърляне се намира преграда с височина $H = 0,100$ m и $\alpha = 45,0°$, изчислете каква трябва да е минималната скорост $v_{\min 1}$ на тялото за да прелети над преградата? Земното ускорение е $g = 10,0$ m/s^2. **(3т)**

в) Изчислете под какъв ъгъл β трябва да се хвърли тялото с начална скорост $v_{\min 2}$ така, че да може да прелети над преградата, а при хвърляне под други ъгли със същата скорост, да не може? **(2т)**

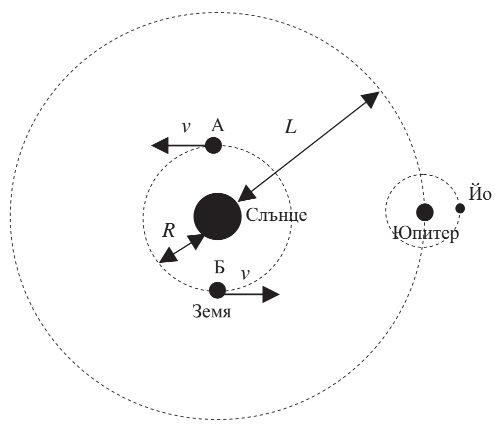
г) Изчислете тази скорост $v_{\min 2}$. **(2т)**

Задача 3. *Скорост на светлината* (двете части са независими)

Скоростта на светлината във вакуум c е физична константа, важна в много области на физиката. Ще разгледаме два известни исторически експеримента за определяне на скоростта на светлината във вакуум.

Част 1. През 17-ти век датският астроном Олаф Рьомер първи измерва скоростта на светлината. Той забелязал, че през различно време на годината Йо (спътник на Юпитер) има различен период на обикаляне около Юпитер. Времето (T) за две последователни излизания на Йо от сянката на Юпитер е различно в зависимост от времето през годината. То е най-голямо $(T_А)$, когато Земята е в точка A от траекторията си и се отдалечава от Юпитер (Фиг. 3а), а най-малко $(T_Б)$, когато Земята е в точка Б от траекторията си и се приближава към Юпитер (Фиг. 3а). Ако скоростта, с която се движи Земята по кръгова орбита с радиус R, е V, радиусът на орбитата на Юпитер е L, то намерете:

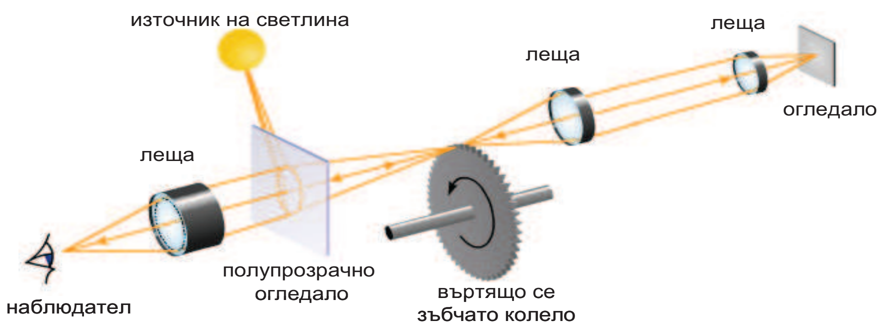
а) формула, която изразява скоростта на светлината в експеримента на Рьомер? **(5т)**



Фиг. 3а.

Забележка: Пропорциите във Фиг. 3а не са реални и фигурата служи само за да се пояснят основните означения. На практика можете да пренебрегнете радиуса на Слънцето, Земята, Юпитер и орбитата на Йо около Юпитер в сравнение с R и L.

Част 2. Друг известен експеримент за определяне на c е опитът на Физо. В опита на Физо лъч, идващ от източник



Фиг. 3б.

на светлина, се отразява в полупрозрачно огледало, преминава през зъбите на въртящо се колело, изминава разстояние $L = 8,66$ km, отразява се от огледало и отново се връща към зъбното колело (Фиг. 3б). Ако при връщането си светлината попада между зъбите на колелото, светлината се вижда от наблюдател, а ако попада върху зъбите, не се вижда. Намерете:

б) стойността за скоростта на светлината в експеримента на Физо, ако дискът има $N = 720$ зъба с ширина, равна на ширината на процепите между тях, и най-малката честота, при която светлината не се вижда от наблюдател при въртене на колелото, е $\nu = 12,5$ Hz? **(3т)**

в) при какви честоти на въртене на колелото светлината ще се вижда с максимална интензивност? **(2т)**

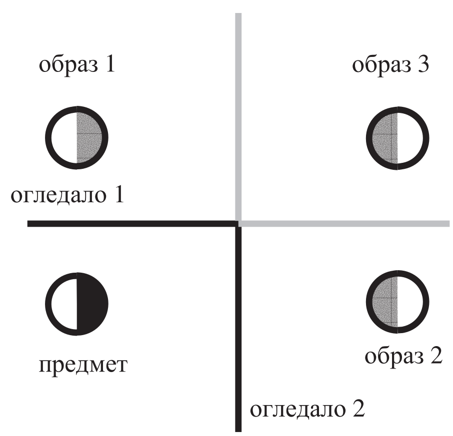
Решения на задачите от темата за 11. и 12. клас

Задача 1. *Двойно огледало*

Част 1:

а) На Фиг. 1. са построени образът на предмета в огледало 1 (образ 1), образът на предмета в огледало 2 (образ 2), както и образите на образ 1 спрямо огледало 2 (образ 3) и на образ 2 спрямо огледало 1 (отново образ 3). Следователно имаме 3 образа **(1т)**

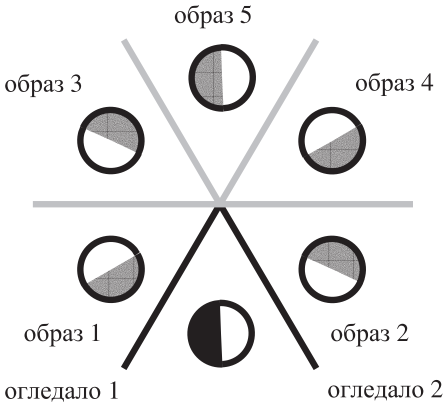
б) Когато вдигнем лявата си ръка, то образът, който се образува в ъгъла, съставен от тези две огледала (образ 3 от Фиг. 1), също вдига лявата си ръка. Това е така, понеже образ 3 е образ на образ 2 и следователно имаме 2 пъти инверсия спрямо ляво дясно, в резултат образ 3 не е обърнат на предмета спрямо ляво дясно. **(2т)**



Фиг. 1.

Част 2:

в) На Фиг. 2 са построени образът на предмета в огледало 1 (образ 1), образът на предмета в огледало 2 (образ 2). След



Фиг. 2.

което сме построили образите на образ 1 спрямо огледало 2 (образ 4) и на образ 2 спрямо огледало 1 (образ 3). Най-накрая сме построили образа на образ 3 спрямо огледало 2 (образ 5) и на образ 4 спрямо огледало 1 (отново образ 5). Следователно имаме 5 образа. **(2т)**

г) Когато вдигнем лявата си ръка, то образът, който се образува в ъгъла, съставен от тези две огледала (образ 5 от Фиг. 2), вдига дясната си ръка. Това е така, понеже образ 5 е получен след нечетен брой отражения. **(2т)**

Част 3 :

д) Ако огледалата са идеални, то се виждат безкраен брой образи. **(1т)**

На практика огледалата не са идеални и затова броят образи, които се виждат, е краен, като всеки следващ по-далечен образ е по-блед от предишните.

е) Разстоянието от нас до третия найблизък образ е $3L$. **(2т)**

Задачата може да се обобщи за произволен ъгъл между огледалата, като има общо решение само когато се намираме на ъглополовящата между огледалата (изключение прави случаят на перпендикулярни огледала).

Задача 2. *Тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта*

а) Проекцията на скоростта по x е $v_x = v_0 \cos\alpha$ **(0,5т)**, а координатата x се изменя с времето така: $x(t) = v_0 \cos\alpha . t$ **(0,5т)**. Проекцията на скоростта по y е $v_y = v_0 \sin\alpha$ **(0.5т)**, а координатата y се изменя с времето така: $y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ **(0.5т)**. Елиминирайки времето от двата закона за пътя, получаваме

$$y(x) = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (2.1)$$

(1т)

б) За да прелети тялото над преградата, трябва при $x = L$, $y \geqslant H$ **(0,5т)**. Замествайки в (2.1), се получава

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{gL^2}{2\cos^2\alpha(L\tan\alpha - H)}} \qquad (2.2)$$

(1т)

Замествайки с дадените стойности, $v_0 \geqslant$ 2m/s или $v_{\min 1} = 2$ m/s. **(1,5т)**

в) При фиксирани L и H, скоростта $v_{\min 2}$ ще съответства на такъв ъгъл β, при който знаменателят на (2.2) има максимум, т.е функцията

$$f(\alpha) = \cos^2\alpha(L\tan\alpha - H)$$

има максимум **(0,5т)**. Тя може да се преобразува до

$$f(\alpha) = \frac{L}{2}\sin 2\alpha - \frac{H}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Необходимо условие тази функция да има максимум е нейната производна да е нула, т.е.

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = L\cos 2\alpha + H\sin 2\alpha = 0. \qquad \textbf{(0.5т)}$$

Следователно

$$\tan 2\beta = -\frac{L}{H}. \qquad \textbf{(0.5т)}$$

Замествайки с дадените стойности,

$$\beta \approx 58.3°. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

г) Замествайки с получената стойност за β в (2.2), получаваме

$$v_{\min 2} \approx 1,80 \text{ m/s}. \qquad \textbf{(2т)}$$

Алтернативно решение на подусловия в) и г) без използване на производна:

Замествайки в (2.1) с $x = L$, $y = H$, и изразявайки $\cos\alpha$ чрез $\tan\alpha$: $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha\right)$, се получава квадратно уравнение за $\tan\alpha$:

$$gL^2\tan^2\alpha - 2Lv_0^2\tan\alpha + gL^2 + 2Hv_0^2 = 0.$$

За да има решение, дискриминантата му трябва да е по-голяма или равна на нула:

$$D = 4L^2v_0^4 - 4gL^2(gL^2 + 2hv_0^2) \geqslant 0.$$

След опростяване се стига до неравенството

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2L^2 \geqslant 0.$$

Минималната скорост съответства на

$$v_{\min 2} = \sqrt{g(H + \sqrt{H^2 + L^2})} \approx 1,80\,\text{m/s}.$$

Оптималният ъгъл β се намира от решението на квадратното уравнение за $\tan\alpha$:

$$\tan\beta = \frac{H + \sqrt{H^2 + L^2}}{L}, \Rightarrow \beta \approx 58.3°.$$

Задача 3. *Скорост на светлината*

Част 1: а) Рьомер разбира, че ефектът на различният период на обикаляне на Йо е заради крайната скорост на светлината. Нека да видим как се е преместила Земята за две последователни излизания на Йо от сянката на Юпитер (Фиг. 3). Нека първото излизане на Йо от сянката на Юпитер да става в момент t_1, а второто в момент t_2, тогава периодът на обиколка на Йо около Юпитер за наблюдател, който е на Юпитер, ще е

$$T = t_2 - t_1 \qquad \textbf{(0.5т)}$$

За наблюдател на Земята моментът, в който Йо изгрява за първи път, е

$$t_1' = t_1 + S/c, \qquad \textbf{(0.5т)}$$

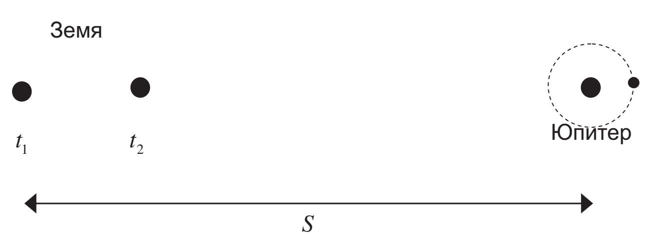
а моментът, в който Йо изгрява за втори път, ще е

$$t_2' = t_2 + \frac{S \pm V(t_2 - t_1)}{c}\ , \qquad \textbf{(0.5т)}$$

където знакът - или + се определя от това, дали Земята се движи в посока на Юпитер или се отдалечава от него. Тогава може лесно да пресметнем периода на обикаляне на Йо около Юпитер, когато Земята е в точка А и в точка Б:

$$T_{\text{А}} = T\left(1 + \frac{V}{c}\right) \qquad \textbf{(1т)}$$

$$T_{\text{Б}} = T\left(1 - \frac{V}{c}\right) \qquad \textbf{(1т)}$$



Фиг. 3.

Или за скоростта на светлината имаме:

$$c = \frac{(T_А + T_Б)V}{T_А - T_Б} \qquad \textbf{(1.5т)}$$

Част 2. б) Нека за времето, което светлината изминава пътя от зъбното колело до огледалото и обратно, зъбното колело се е завъртяло така, че на мястото на пр реза е дошъл съседния зъб. Тогава светлината изцяло се блокира и не се вижда от наблюдателя.

$$t = \frac{2L}{c} = \frac{1}{2N\nu} \qquad \textbf{(1т)}$$
$$\Rightarrow c = 4LN\nu \qquad \textbf{(1т)}$$

Или числено имаме:

$$c = 4 \times 8,66 \text{ km} \times 720 \times 12,5 \text{ s}^{-1}$$
$$\approx 312\,000 \text{ km/s} \qquad \textbf{(1т)}$$

в) Ако за времето, за което светлината изминава пътя от зъбчатото колело до огледалото и обратно, зъбното колело се е преместило така, че вместо първия прорез се намира K-тия прорез, то светлината отново е видима. Това става при следното равенство на времената и новата честота на въртене η на колелото:

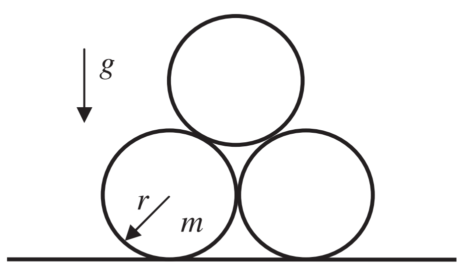
$$t = \frac{2L}{c} = \frac{K}{N\eta}, \qquad K = 1, 2, 3, ... \quad \textbf{(1т)}$$
$$\Rightarrow \eta = 2K\nu \qquad \textbf{(1т)}$$

Специална тема

Съставители: Мирослав Абрашев, Виктор Иванов

Задача 1. *Пирамида от цилиндри*

Три еднакви еднородни цилиндри, всеки с радиус r и маса m, са поставени върху хоризонтална повърхност и се допират един до друг, както е показано на фигурата. Земното ускорение е g.



а) Нека няма триене на цилиндрите с повърхността и помежду им. Първоначално цилиндрите са в покой. Намерете ускоренията a_1 на горния и a_2 на страничните цилиндри в началния момент на тяхното движение. **(2т)**

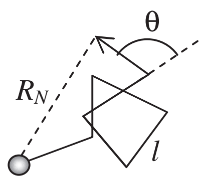
б) Нека коефициентът k на триене на цилиндрите с повърхността и помежду им е един и същ и е толкова голям, че цилиндрите остават в покой. Намерете интервалът от стойности на k, когато това е възможно. **(2т)**

в) Нека коефициентът k на триене на цилиндрите с повърхността и помежду им е един и същ и е такъв, че цилиндрите започват да се движат, като се хлъзгат помежду си и в повърхността. Намерете ускоренията a_3 на горния и a_4 на страничните цилиндри в началния момент на тяхното движение. **(3т)**

г) Намерете интервалът от стойности на k, когато ситуацията от подусловие в) е възможна. **(3т)**

Задача 2. *Брауново движение*

Брауновото движение е хаотично топлинно движение на фини частици (т.нар. *Браунови частици*) поради случайните им удари с молекулите на обкръжаващата ги среда. Всъщност, Брауновата частица може да се разглежда като една гигантска молекула, за чието движение са в сила основните закони на молекулно-кинетичната теория.



Фиг. 2.1.

А) Сферична неразтворима Браунова частица с диаметър $d = 1.0$ μm и плътност $\rho = 1000$ kg/m^3 извършва Брауново движение във вода при температура $T = 300$ K. Оценете средната скорост $\bar{v}$ на топлинно движение на частицата*.**(3т)**

Б) Поради случайния характер на ударите на молекулите в Брауновата частица, нейната траектория е сложна начупена линия. Приемете, че между два поредни удара частицата се движи праволинейно, като изминава едно и също разстояние – т.нар. *свободен пробег* l, а посоката ѝ на движение след даден удар сключва с посоката ѝ на движение преди удара случаен ъгъл θ между 0 и 180° (вж. Фиг. 2.1). На какво средно разстояние $\bar{R}_N$ ще се отдалечи частицата от началното си положение след голям брой удари N с молекулите на водата. Изразете отговора чрез l и N. **(3т)**

В) В началния момент ($t = 0$) три еднакви Браунови частици, подобни на частицата, описана в т. А, се намират в центъра на координатната система ($X = 0$, $Y = 0$). Движението им се наблюдава под микроскоп, като се фотографират през интервали време $\Delta t = 100$ s, както е показано на четирите кадъра от Фиг. 2.2. Като използвате данните от снимките, оценете свободния пробег l на Брауновите частици, както и средното време τ между последователните им удари с молекулите на водата. **(4т)**

При решаването на тази подточка можете (но не е задължително) да използвате празната координатна мрежа, дадена на Фиг. 2.3. В този случай предайте листа с построените от Вас графики заедно с останалите листа от решението!.

Физични константи. Константа на Болцман: $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

Задача 3. *Затихващи електромагнитни трептения*

Кондензатор с капацитет $C = 0,100$ μF и соленоид (бобина) с индуктивност $L = 100$ mH и собствено съпротивление $R = 10,0$ Ω са свързани успоредно към идеален източник на напрежение с електродвижещо напрежение $E = 10,0$ V. Така свързани те са стояли дълго време.

а) начертайте схемата и изчислете установените постоянни напрежение U_0 на кондензатора и ток I_0 през бобината.**(1т)**

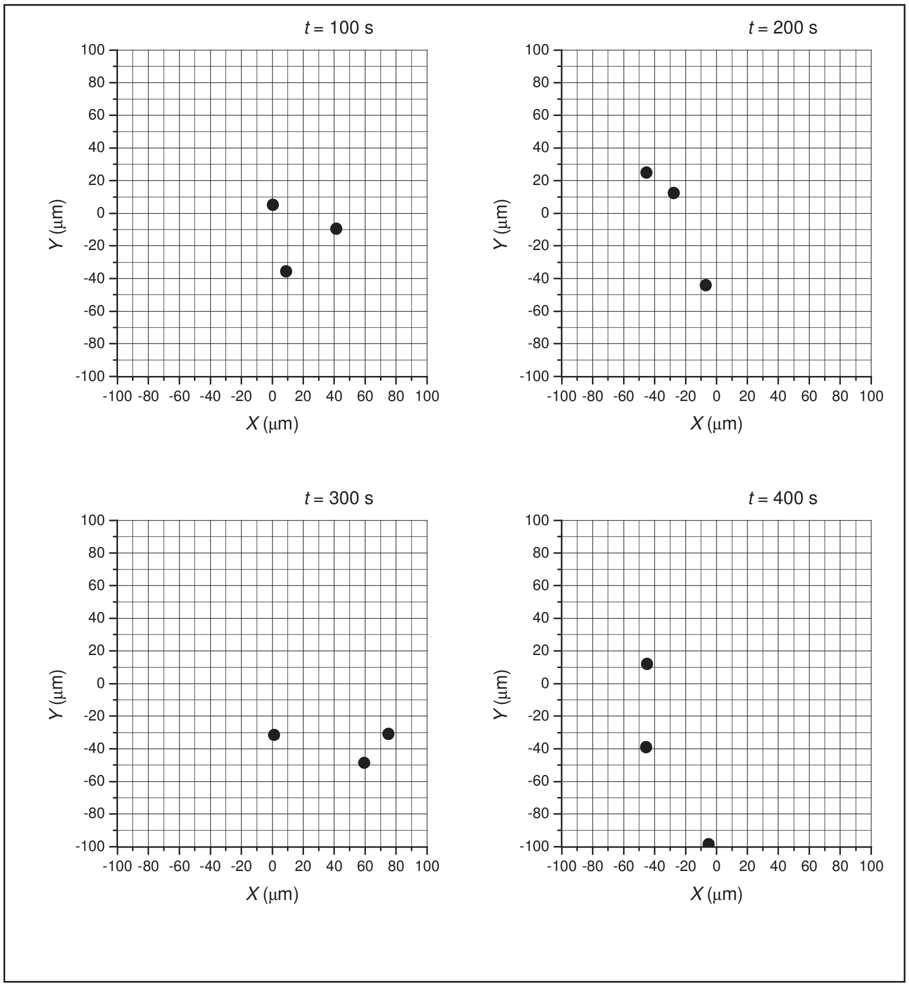
б) в момента време $t = 0$ източникът на напрежение се разкачва от останалата част на схемата. Пренебрегвайки съпротивлението на бобината, намерете периодът T_0 на възникналите електромагнитни трептения и максималните напрежение $U_{\max}$, до което се зарежда кондензатора и ток $I_{\max}$, който протича през бобината. **(2т)**

в) ако решението на уравнението

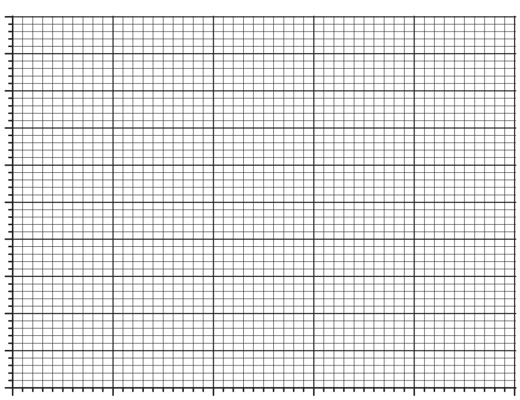
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

***Упътване*. За една величина X, която приема случайни положителни стойности, можете да приемете, че $\overline{X^2} \approx (\bar{X})^2$, т.е. средната стойност на нейния квадрат е приблизително равна на квадрата от нейната средна стойност. В конкретната задача това приближение води до грешка от порядъка на 10% за търсените средни стойности.

Предайте листа заедно с решението на зад. 2!



Фиг. 2.2.



Фиг. 2.3. Използвайте, ако решението налага

е от тип

$$x(t) = Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t + \varphi),$$

изразете неизвестните параметри κ и ω в решението чрез дадените параметри β и ω_0 в уравнението. **(2т)**

г) използвайки решението от подусловие в), намерете точната (отчитайки съпротивлението R) зависимост на заряда $q(t)$ на плочите на кондензатора от времето. Изчислете точния период T на електромагнитните трептения и началната фаза φ. **(3т)**

д) изчислете времето τ (в секунди и брой периоди), за което енергията в трептящия кръг намалява 2 пъти. **(1т)**

е) начертайте графиката на зависимостта на напрежението $U(t)$ на кондензатора от времето. **(1т)**

Загубите на енергия чрез излъчване се пренебрегват.

Полезна математика:

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax},$$
$$\frac{d}{dx}[\cos(ax)] = -a\sin(ax),$$
$$\frac{d}{dx}[\sin(ax)] = a\cos(ax),$$
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \\ = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) + f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

Специална тема – решения на задачите

Задача 1. *Пирамида от цилиндри*

а) Силите, действащи на горния цилиндър (1) и десния цилиндър (2), са нарисувани на фигурата. Очевидно ускорението a_2 е хоризонтално, докато от съображения за симетрия ускорението a_1 е вертикално. Следователно

(1.1) $$mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N = ma_1$$ **(0,25т)**

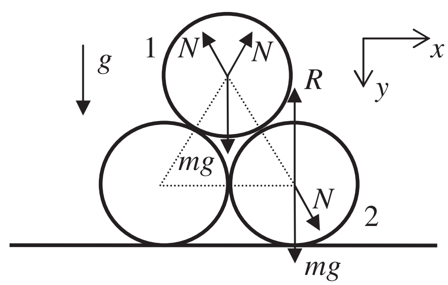
(1.2) $$\frac{N}{2} = ma_2$$ **(0,25т)**

Тъй като цилиндрите се допират, при преместване на цилиндър 1 надолу на Δy, цилиндър 2 се премества надясно на Δx, като

$$(r+\Delta x)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}2r-\Delta y\right)^2 = (2r)^2,$$ **(0,25т)**

откъдето

$$r^2+2r\Delta x+\Delta x^2+3r^2-2\sqrt{3}r\Delta y+\Delta y^2=4r^2.$$



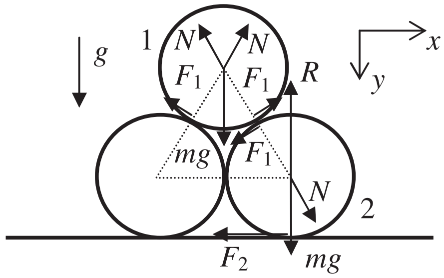
След пренебрегване на вторите степени на малките премествания и опростяване се получава $\Delta x = \sqrt{3}\Delta y$. Следователно и $v_2 = \sqrt{3}v_1$, откъдето и

(1.3) $$a_2 = \sqrt{3}a_1.$$ **(0,25т)**

Замествайки (1.3) в (1.2) и решавайки системата уравнения (1.1) и (1.2), се получава

$$a_1 = \frac{g}{7}\ ,$$ **(0,5т)**

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}g}{7}\ .$$ **(0,5т)**



б) след като цилиндрите са в покой, резултантната сила и въртящ момент, действащи на всеки един от тях, трябва да са нула.

За цилиндър 1:

(1.4) (по y) $\quad mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N - 2\frac{F_1}{2} = 0,$

(1.5) $\quad F_1 \leqslant kN$

За цилиндър 2:

(1.6) (по x) $\quad \frac{N}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - F_2 = 0,$ **(0,25т)**

(1.7) $\quad F_2 \leqslant kR,$

(1.8) (по y) $\quad mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{F_1}{2} - R = 0,$ **(0,25т)**

(няма въртене)

(1.9) $\quad F_2 r - F_1 r = 0.$ **(0,25т)**

От (1.9) следва, че

$$F_1 = F_2 = F.$$ **(0,25т)**

Замествайки в (1.6) се получава

(1.10) $\quad N = (2+\sqrt{3})F \leqslant (2+\sqrt{3})kN),$ **(0,25т)**

откъдето

$$k \geqslant \frac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0,268.$$ **(0,5т)**

Остава да се провери, че при такива стойности на k е изпълнено и (1.7). Замествайки (1.10) в (1.8) се получава

$$mg + N = R.$$

Следователно, когато F_1 е сила на триене при покой, F_2 също е сила на триене при покой. **(0,25т)**

в) Използвайки чертежа от подусловие б), написваме уравненията за движение на цилиндрите 1 и 2:

(1.11) (1 по y) $\quad mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N - 2\frac{F_1}{2} = ma_3$ **(0,25т)**

(1.12) (2 по x) $\quad \frac{N}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - F_2 = ma_4$ **(0,25т)**

(1.13)(2 по y) $\quad mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{F_1}{2} - R = 0$ **(0,25т)**

(1.14) $\quad F_1 = kN,$

(1.15) $\quad F_2 = kR$

и от подусловие а)

(1.16) $\quad a_4 = \sqrt{3}a_3.$ общо **(0,25т)**

Замествайки (1.14) в (1.11) се получава

(1.17) $N = \frac{m(g-a_3)}{k+\sqrt{3}}.$ **(0,5т)**

Замествайки (1.14), (1.15) и (1.16) в (1.12) и (1.13), след преобразувания се получава:

(1.12а) $\quad (1-\sqrt{3}k)N - 2kR = m2\sqrt{3}a_3$ **(0,5т)**

(1.13а) $\quad 2kmg + k(k+\sqrt{3})N - 2kR = 0.$ **(0,5т)**

Изваждайки (1.13а) от (1.12а) и замествайки N с израза от (1.17), след преобразования се получава

(1.18) $\quad a_3 = g\frac{3k^2 + 4\sqrt{3}k - 1}{k^2 - 7}$ и

$$a_4 = \sqrt{3}a_3.$$ **(0,5т)**

г) ускоренията a_3 и a_4 в подусловие в) са получени при допускане, че има хлъзгане както между цилиндрите, така и между цилиндрите и хоризонталната повърхност. Условието за хлъзгане между цилиндрите и хоризонталната повърхност е:

(1.19) $\varepsilon r < a_4,$ **(0,5т)**

където ε е ъгловото ускорение на цилиндър 2. То може да се получи от уравнението за въртеливото движение на цилиндър 2:

(1.20) $F_2 r - F_1 r = I\varepsilon,$ **(0,25т)**

където $I = \frac{1}{2}mr^2$ (инерчен момент на еднороден цилиндър). Използвайки (1.14), (1.15), (1.16) и (1.19), (1.20) се преобразува до

(1.20а) $k(R - N) < \frac{\sqrt{3}}{2}ma_3.$ **(0,25т)**

Замествайки (1.18) в (1.17), се получава

(1.21) $N = \frac{2mg(k+\sqrt{3})}{7-k^2}.$ **(0,25т)**

Използвайки (1.13а), се получава

$$R = mg + \frac{k+\sqrt{3}}{2}N,$$ **(0,25т)**

и оттам, отчитайки (1.21):

(1.22) $R - N = mg + \frac{(k+\sqrt{3}-2)}{2}\frac{2mg(k+\sqrt{3})}{7-k^2}.$ **(0,5т)**

Замествайки (1.22) в (1.20а) и отчитайки (1.18), след преобразувания се получава неравенство за k:

(1.23) $(7\sqrt{3}-4)k^2+4(8-\sqrt{3})k-\sqrt{3}<0.$ **(0,5т)**

Тъй като k е положително, неравенството е изпълнено за $k \in (0, k_1)$, където

$$k_1 = \frac{-2(8-\sqrt{3}) + \sqrt{17^2 - 4.17.\sqrt{3}}}{7\sqrt{3}-4} \approx 0,0676.$$ **(0,5т)**

Задача 2. *Брауново движение*

А) Движението на центъра на масата на частицата е свързано с три степени на свобода и следователно средната кинетична енергия на това движение е:

$$\bar{E}_k = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}k_{\scriptscriptstyle B}T \qquad (1)$$

Като вземем предвид приближението за средната скорост:

$$\overline{v^2} \approx (\bar{v})^2, \qquad (2)$$

получаваме:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_{\scriptscriptstyle B}T}{m}}\,, \qquad (3)$$

Понеже

$$m = \frac{\pi\rho d^3}{6}\,, \qquad (4)$$

намираме:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{18k_{\scriptscriptstyle B}T}{\pi\rho d^3}} = 4.9\times10^{-3}\ \text{m/s}. \qquad (5)$$

Б) Общото преместване на частицата след N удара е:

$$\vec{R} = \vec{l}_1 + \cdots + \vec{l}_N, \qquad (6)$$

където $\vec{l}_i$ е векторът на преместване от N-тия до N_1+1-вия удар, като по модул $l_i = l$. Повдигаме равенството на квадрат и получаваме:

$$R^2 = Nl^2 + \sum_{i,j}\vec{l}_i\cdot\vec{l}_j. \qquad (7)$$

Понеже $\vec{l}_i\cdot\vec{l}_j = l^2\cos\theta$, а θ приема случайни стойности от 0 до 180°, следва, че $\cos\theta$ приема случайни стойности от -1 до +1. Следователно:

$$\overline{\cos\theta} = 0. \qquad (8)$$

Това означава, че средностатистически двойната сумата от формула (15) е нула. Тогава за средното преместване след N удара имаме:

$$\overline{R_N^2} = Nl^2 \tag{9}$$

или в рамките на приетото приближение:

$$\bar{R}_N = l\sqrt{N}. \tag{10}$$

В) За време t частицата претърпява:

$$N = t/\tau \tag{11}$$

удара. От друга страна, средното време между два удара е:

$$\tau = l/\bar{v}. \tag{12}$$

Следователно зависимостта (9) се записва като следната функция на времето:

$$\overline{R^2(t)} = l\bar{v}t. \tag{13}$$

Отчитаме по графиките координатите на частиците в различните моменти от време и пресмятаме средния квадрат на преместването на трите частици:

$$\overline{R^2(t)} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(x_i^2(t) + y_i^2(t)). \tag{14}$$

Резултатите са нанесени в таблицата подолу:

t [s]	X [μm]	Y [μm]	R^2 [μm^2]	$\langle R^2\rangle$ [μm^2]	D [μm^2/s]
100	0	5	25	1017	10.2
	10	-35	1325		
	40	-10	1700		
200	-45	25	2650	1850	9.3
	-25	15	850		
	-5	-45	2050		
300	0	-30	900	4508	15.0
	60	-50	6100		
	75	-30	6525		
400	-45	15	2250	5175	12.9
	-45	-35	3250		
	-5	-100	10025		

Определянето на l може да стане по два начина.

I начин. За всеки от четирите момента пресмятаме:

$$D = \frac{\overline{R^2(t)}}{t}\ , \tag{15}$$

където $D = l\bar{v}$ и нанасяме резултатите в отделна колона на таблицата. Средната стойност на D за набора измервания е:

$$\bar{D} \approx 12\ \mu\mathrm{m}^2/\mathrm{s} = 1.2\times10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \tag{16}$$

а средноквадратичната грешка:

$$\Delta D \approx 3\ \mu\mathrm{m}^2/\mathrm{s} = 0.3\times10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \tag{17}$$

т.е.

$$D = (1.2\pm0.3)\times10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}. \tag{18}$$

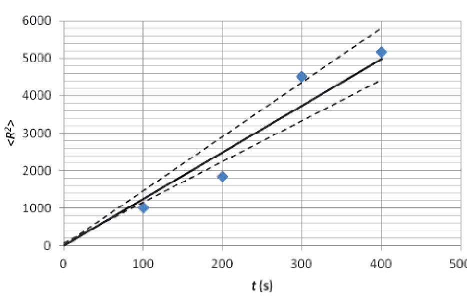
Така определяме свободния пробег l:

$$l = \frac{D}{\bar{v}} = (2.4\pm0.6)\times10^{-9}\ \mathrm{m} \tag{19}$$

и средното време между ударите:

$$\tau = \frac{l}{\bar{v}} = (4.9\pm1.2)\times10^{-7}\ \mathrm{s}. \tag{20}$$

II начин. Представяме графично зависимостта на $\overline{R^2}$ от t и прекарваме по данните права линия, минаваща през координатното начало.



Определяме D като коефициент на наклона на правата:

$$D = (1.3\pm0.2)\times10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \tag{21}$$

а стойностите на l и на τ, както по първия начин:

$$l = \frac{D}{\bar{v}} = (2.7 \pm 0.4) \times 10^{-9}\ \mathrm{m} \qquad (22)$$

$$\tau = \frac{l}{\bar{v}} = (5.5 \pm 0.8) \times 10^{-7}\ \mathrm{s}. \qquad (23)$$

Схема на оценяване на задача 2

Елемент от решението/подусловие	**Точки**
Прилага формулата за средна кинетична енергия с 3 степени на свобода	1.0
Изразява масата на частицата чрез плътността и диаметъра	0.5
Получава израз за средната скорост	1.0
Пресмята числено средната скорост	0.5
Общо по т. А	**3.0**
Представя общото преместване като сума от елементарни премествания	0.5
Получава израз за квадрата на преместването	1.0
Обосновава, че $\overline{\cos\theta} = 0$	1.0
Получава израз за средното преместване	0.5
Общо по т. Б	**3.0**
Изразява $\overline{R^2}$като функция на t, l и v	0.5
Снема данни за координатите и ги подрежда в таблица	1.2
Пресмята средни стойности на Rили на R^2	0.4
Обработва данните таблично или графично, за да пресметне D	0.5
Обработва данните таблично или графично, за да пресметне ΔD	0.2
Определя l	0.4
Определя Δl	0.2
Определя τ	0.4
Определя $\Delta\tau$	0.2
Общо по т. В	**4.0**
Общо за задачата	**10.0**

Задача 3. *Затихващи електромагнитни трептения*

а) за правилно начертана схема.**(0,5т)**

Напрежението $U_0 = E = 10,0$ V, **(0,25т)**

токът $I = E/R = 1,00$ A. **(0,25т)**

б) при пренебрегване на съпротивлението R трептенията са незатихващи. Следователно периодът

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \approx 0,628\ \mathrm{ms}, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а от законът за запазване на енергията

$$\frac{1}{2}CU_0^2 + \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2,$$

откъдето

$$U_{\max} = \sqrt{U_0^2 + \frac{LI_0^2}{C}} \approx 1000\ \mathrm{V}, \qquad \textbf{(0,75т)}$$

$$I_{\max} = \sqrt{I_0^2 + \frac{CU_{\max}^2}{L}} \approx 1,00\ \mathrm{A}. \qquad \textbf{(0,75т)}$$

в) ако $x(t) = Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t + \varphi)$, то

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\kappa Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi)\\ &\quad -\omega Ae^{-\kappa t}\sin(\omega t+\varphi), \qquad \textbf{(0,25т.)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \kappa^2 Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi)\\ &\quad + \kappa\omega Ae^{-\kappa t}\sin(\omega t+\varphi)\\ &\quad + \kappa\omega Ae^{-\kappa t}\sin(\omega t+\varphi)\\ &\quad - \omega^2 Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi) =\\ &= (\kappa^2-\omega^2)Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi)\\ &\quad + 2\kappa\omega Ae^{-\kappa t}\sin(\omega t+\varphi).\end{aligned}$$

(0,25т.)

Замествайки в даденото уравнение, се получава:

$$\begin{aligned}&(\kappa^2-\omega^2)Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi)+\\ &\quad + 2\kappa\omega Ae^{-\kappa t}\sin(\omega t+\varphi)+\\ &\quad + 2\beta\Big[-\kappa Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi)-\\ &\quad - \omega Ae^{-\kappa t}\sin(\omega t+\varphi)\Big]+\\ &\quad + \omega_0^2 Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi) = 0\end{aligned}$$

След опростяване на уравнението:

$$(\kappa^2-\omega^2-2\beta\kappa+\omega_0^2)Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi)+$$
$$+\,2(\kappa-\beta)\omega Ae^{-\kappa t}\sin(\omega t+\varphi)=0.$$

(0,25т)

Тъй като равенството трябва да е изпълнено за всеки момент време t, то това е възможно само, ако коефициентите пред тригонометричните функции са нули. **(0,5т)**

Тогава

$$\kappa=\beta \qquad \textbf{(0,25т)}$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

г) тъй като сумата на напреженията по затворен контур трябва да е нула:

$$U_C+U_L+U_R=\frac{q(t)}{C}+L\frac{dI}{dt}+RI=0.$$

(0,25т)

Понеже $I=\dfrac{dq}{dt}$, получаваме

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0. \qquad \textbf{(0,25т)}$$

Използвайки решението от подусловие в), получаваме: $q(t)=Ae^{-\kappa t}\cos(\omega t+\varphi)$, където

$$\kappa=\frac{R}{2L} \qquad \textbf{(0,25т)}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad \textbf{(0,25т)}$$

Периодът

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}\approx 0,628\text{ ms}$$

(0,25т)

За да изчислим началната фаза, първо намираме

$$q(0)=A\cos\varphi \qquad \textbf{(0,25т)}$$

$$\frac{dq}{dt}(0)=-A\kappa\cos\varphi-A\omega\sin\varphi \qquad \textbf{(0,25т)}$$

От тези две равенства намираме

$$\tan\varphi=-\frac{\kappa+\dfrac{\dfrac{dq}{dt}(0)}{q(0)}}{\omega} \qquad \textbf{(0,25т)}$$

Тъй като

$$q(0)=CE \qquad \textbf{(0,25т)}$$

$$\frac{dq}{dt}(0)=-\frac{E}{R} \qquad \textbf{(0,25т)}$$

то

$$\tan\varphi\approx 100 \qquad \textbf{(0,25т)}$$

$$\varphi\approx 89,4^\circ \qquad \textbf{(0,25т)}$$

д) тъй като в определени моменти t_i от време кондензаторът е зареден до максимални стойности и токът в тези моменти е нула, то енергията на системата в тези моменти време ще бъде

$$W(t_i)=\frac{q(t_i)^2}{2C} \qquad \textbf{(0,25т)}$$

следователно енергията на системата ще зависи от времето така:

$$W(t)=W(0)e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \textbf{(0,25т)}$$

Енергията ще намалее 2 пъти за време

$$\tau=\frac{L}{R}\ln 2\approx 6,93\text{ ms}\approx 11,0T. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

е) Графиката на зависимостта на напрежението $U(t)$ на кондензатора от времето изглежда така: **(1т)**