Физика: Методология на обучението **1** (2013) 75–79

За странната аритметика на средните скорости

Христо Попов

Абстракт. С помощта на един прост пример за неадитивна величина (средна скорост) се коментира връзката между реалността и математическите правила.

Все по-често колеги (както учители, така и университетски преподаватели) се оплакват, че възпитаниците им не могат да събират прости дроби. Най-честата грешка била следната:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}\ ?! \tag{1}$$

Обикновено такива разговори завършват с риторичния въпрос "На какво, в крайна сметка, ги учат математиците, след като разполагат с толкова много часове?", както и с мрачни изводи, засягащи залеза на образователната ни система.

Всъщност, задавали ли сте си въпроса откъде следва "сложното" правило

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \tag{2}$$

за събиране на прости дроби? Очевидно то е извлечено от всекидневния човешки опит. Половин хляб плюс половин хляб прави цял хляб, както следва от (2), а не отново половин хляб, както би следвало, ако вярна беше формула (1). Ако от вкъщи до училище е 1/3 km, а от училище до автобусната спирка – 1/6 km, то от вкъщи през училището до спирката е половин километър, както следва от (2), а не 2/9 km, както бихме получили, ако пресмятаме по формула (1).

Всички примери, които може да се приведат в подкрепа на формула (2), се отнасят за величини, които са *адитивни*: времеви интервали, разстояния по определена траектория, маси, обеми на твърди тела и др. Често се налага обаче да работим с величини, които не притежават свойството адитивност: средна скорост, плътност, концентрация на разтвори и много други. Нека разгледаме как се пресмятат средни стойности на такива величини. За конкретност ще разгледаме задача, в която стойностите на разстоянията се закръглени за опростяване на пресмятанията.

Задача. *Победителят в колоездачния пробег София–Велико Търново–Русе първия ден пробягал разстоянието $s_1 = 200$ km от София до Велико Търново със средна скорост $v_1 = 40$ km/h, а втория ден – разстоянието $s_2 = 100$ km до Русе със средна скорост $v_2 = 50$ km/h. Колко е средната скорост на състезателя по целия маршрут?*

Предполагам никой няма да пресметне търсената величина като средно аритметично от двете зададени скорости, т.е. $(40 + 50)/2 = 45$ km/h. Ако това "решение" бе правилно, задачата би била некоректна: зададените в условието разстояния се оказват излишни.

Един по-изкушен в решаването на задачи читател би могъл да отчете, че разстоянието до В. Търново е 2/3 от целия маршрут (който е 300 km), а от В. Търново до Русе – само 1/3 от него. Тогава при пресмятане на общата средна скорост бихме могли да вземем v_1 и v_2 със съответните тегловни коефициенти. Тогава сметката би изглеждала по следния начин:

$$\frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 = \frac{2}{3}40 + \frac{1}{3}50 \approx 43,33 \text{ km/h}.$$

И този резултат обаче не е верен, защото не отчитаме, че по определение *средната скорост се пресмята като частно от изминатото разстояние и интервала от време на движение*.

В нашия случай първият етап, София–Велико Търново, е изминат за време $t_1 = s_1/v_1 = 200/40 = 5$ h, а вторият – за $t_2 = s_2/v_2 = 100/50 = 2$ h. Следователно общото разстояние от 300 km е изминато за 7 h, така че отговорът на задачата е всъщност $v_{\text{ср}} = 300/7 \approx 42,73$ km/h – стойност, близка до пресметнатата с тегловните коефициенти, но все пак различна от нея.

Да запишем направеното пресмятане буквено:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{200 + 100}{5 + 2} \approx 42,73 \text{ km/h}. \tag{3}$$

Ако в тази формула изразим двете времена с дадените в условието скорости, тя придобива вида:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 v_1 + s_2 v_2} v_1 v_2\,, \tag{4}$$

който, меко казано, не предоставя големи възможности за тълкуване.

Приликата обаче между дробта $\dfrac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$ от формула (3) и дясната страна на формула (1) разкрива една възможност за опростяване на пресмятането на средни скорости. За целта се налага да развием "нова аритметика", съдържаща една допълнителната операция, да я наречем *тилда-сумиране* на прости дроби, която ще означаваме със символа $\tilde{+}$. По определение тилда-сумата на дробите

$\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се пресмята по формулата:

$$\frac{a}{b} \tilde{+} \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \,. \tag{5}$$

В тази нова аритметика целите числа се представят винаги като дроби със знаменател 1, така че, например тилда-сумата на 3 и 2 е

$$3 \tilde{+} 2 = \frac{3}{1} \tilde{+} \frac{2}{1} = \frac{3+2}{1+1} = \frac{5}{2},$$

а не 5, както бихме получили при обикновено сумиране.

С помощта на новата операция формула (3) би могла да се запише като

$$v_{\text{ср.}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1}{t_1} \tilde{+} \frac{s_2}{t_2} \,, \tag{6}$$

което всъщност означава, че:

$$v_{\text{ср.}} = v_1 \tilde{+} v_2 \,, \tag{7}$$

наистина максимално просто. С други думи, ако при сумиране на прости дроби се използва тилда-сумиране, средната скорост (а заедно с нея и други величини като плътност и пр., които се дефинират чрез отношение на адитивни величини) би била адитивна величина: съгласно с формула (7) средната скорост по целия маршрут е равна на тилда-сумата от средните скорости по отделните негови участъци. Това твърдение е, разбира се, много по-просто от онова, изразено с формула (4), но ... каква е цената на опростяването? Цената е твърде голяма – при новото правило за събиране на прости дроби всички величини от рода на дължини, маси и пр. ще се подчиняват на някакви по-сложни правила за събиране.

Да разгледаме едно приложение на формула (7), резултатът от която е в пълно съгласие с нашите *интуитивни* представи за средна скорост. Ако например двата етапа от състезанието, за което се говори в условието на задачата, са изминати с една и съща средна скорост от 40 km/h, то *очевидно* и средната скорост за цялото състезание е също 40 km/h независимо от дължините на отделните етапи. Ето как този естествен резултат следва от новата формула за тилда-сумиране на дроби:

$$v_{\text{ср.}} = v_1 \tilde{+} v_2 = \frac{40}{1} \tilde{+} \frac{40}{1} = \frac{40+40}{1+1} = 40 \text{ km/h}. \tag{8}$$

Не е трудно да си представим колко различна кинематика бихме получили въз основа на твърдението, че:

> *средната скорост на движение по един участък от траекторията е тилда-сума от средните скорости по подучатъците, на които може да се разбие тази траектория.*

И понеже разбиването на един участък на подучастъци може да става по безброй много начини, това твърдение трябва да е вярно и когато тези подучастъци са безкрайно малки. А тъй като средната скорост по безкрайно малък участък е равна на моментната скорост, в края на крайщата бихме получили, че средната скорост по целия участък е някакъв вид тилда-интеграл от моментните скорости. И т.н. – от странни по-странни твърдения!

Въпросът, който неизбежно пораждат тези разглеждания е: *кому е нужно всичко това*? Ясно е, че никой няма да започне да пресмята сумите на прости дроби по “новото правило” (5), поради което простият отговор на зададения въпрос е: *никому*. Нещата имат обаче и друга страна: представете си, че когато са създавали правилата за пресмятане с прости дроби, древните математици са имали предвид не дължини, не времеви интервали и пр., а тъкмо средни скорости или плътности. Каква аритметика биха могли да създадат тогава?

Математиците често използват примера със средните скорости, както и други подобни примери, когато искат да покажат как в математиката постепенно се заражда и си пробива път идеята, че науката не борави с априорни истини, че нейните правила не са безотносителни към заобикалящия ни свят. Ето какво пише по този повод например американският професор по математика Морис Клайн (1908–1992), специалист по история, философия и обучение по математика в книгата си *Математика. Загуба на определеността** (с. 112):

> “*Приведените примери ... свидетелстват за едно: като въвеждаме операции, които са различни от обикновените, ние въпреки това можем да стигнем до аритметика, която е приложима към реалния свят. В математиката са известни и много други аритметики. Разбира се, нито един здравомислещ математик няма да започне да изобретява аритметика “просто така”, за собствено удоволствие. Всяка аритметика е предназначена за описание на някакъв клас явления от заобикалящия ни физически свят. Операциите, извършвани с числата, се избират по такъв начин, че да съответстват на конкретния клас явления. ... Новата аритметика трябва да облекчава изследването на това, което става в действителността. Само опитът може да покаже в кои случаи обикновената аритметика е приложима към едно или друго физично явление. Следователно ние не можем да разглеждаме аритметиката като сбор от истини, които задължително са приложими за описание на всички физични явления. Разбира се, то-*

*М. Клайн, *Математика. Утрата определенности*, Москва, Мир, 1984.

ва се отнася и за "продълженията" на аритметиката – алгебрата и математичния анализ."

Именно поради тези съображения "... *опитът на древните мислители да осигурят истинност на математиката, като залагат в основите ѝ самоочевидни истини и като използват само дедуктивни доказателства, се проваля.*".

Така чрез разширяване на кръга от изучаваните явления се появяват например Хамилтоновата алгебра на кватернионите, с чиято помощ по-късно Максуел придава най-компактния и елегантен (но за съжаление – и най-неразбираем) вид на своите уравнения на електромагнитното поле, матричното смятане, с чиято помощ Хайзенберг полага основите на квантовата механика и др.

И накрая, ако сте практикуващ учител и имате ученик с интерес към точните науки, опитайте да го заинтригувате с изложеното тук. Така ще го стимулирате да обърне внимание на някои от сложните въпроси на философията и методологията на науката, които обикновено в училище нямаме възможност да разглеждаме, ще му помогнете да се ориентира в тях. А като практическа проверка доколко е разбрал прочетеното, може да му предложите с помощта на новото тилда-сумиране на прости дроби да изведе формула за концентрацията на разтвор, който се получава от смесването на два водни разтвора на спирт с различни концентрации, след което да провери получената формула, като я изведе по обикновения начин.

On the Strange Arithmetic of Average Velocities

Ch. Popov

Abstract: With the help of a simple example of nonadditive quantity (average velocity) the connection between reality and mathematical rules is commented.