Физика: Методология на обучението **1** (2013) 123–147

Национална олимпиада по физика, Хасково, 21.04.2012

Тема за 7. клас

Съставител: Максим Максимов

Задача 1.

Част 1. Отборът на математическата гимназия от град П тръгва с автобус за Националната олимпиада по физика в гр. Хасково. За да пристигне навреме в Хасково, водачът на автобуса планира да се движи през целия път с постоянна скорост $v_1 = 60$ km/h. По време на пътуването обаче завалява дъжд и той е принуден да намали скоростта на $v_2 = 50$ km/h. Когато дъждът спира, до Хасково остават още 60 km, които автобусът изминава със скорост $v_3 = 80$ km/h и успява да пристигне за планираното време. Колко часа е продължил дъждът? **(7т)**

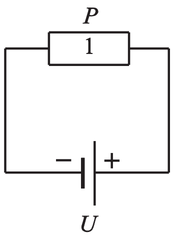
Част 2. От метално фолио с дебелина $d = 0,20$ mm е направено кухо кубче с ръб $a = 5,0$ cm. Определете плътността ρ на метала, ако масата на кубчето е $m = 8,1$ g. **(3т)**

Задача 2.

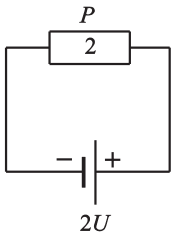
Част 1. Разполагате с два консуматора, за които е в сила законът на Ом, и две батерии.

а) Когато консуматорите се свържат към батерии с напрежение съответно U и $2U$, мощността на тока през тях е еднаква и равна на P (Фиг. 1a и 1b). Определете отношението R_1/R_2 на съпротивленията на двата консуматора. **(2т)**

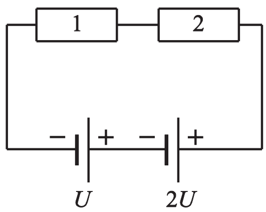
б) Изразете чрез P (вж. точка **а**) мощността на тока P_1 и P_2 съответно през двата консуматора, когато те и батериите се свържат, както е показано на схемата от Фиг. 1c. Пресметнете числено тези мощности, ако $P = 25$ W. **(3т)**



Фиг. 1a.

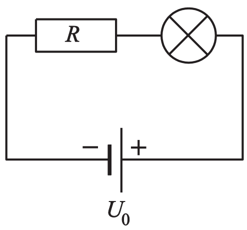


Фиг. 1b.



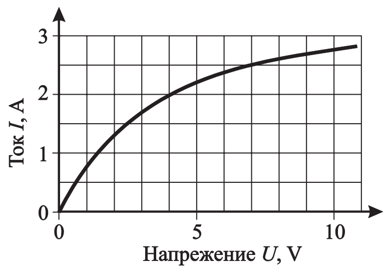
Фиг. 1c.

Част 2. Резистор, за който е в сила законът на Ом, и лампа са свързани към батерия с напрежение $U_0 = 6$ V (вж. схемата от Фиг. 2a). Зависимостта на тока I през лампата от подаденото между двата ѝ края напрежение U е показана на Фиг. 2b. Определете съпротивлението R на резистора, ако общата мощност на тока през лампата и резистора е $P = 12$ W. **(5т)**



Фиг. 2a.

ISSN 1314–8478



Фиг. 2b.

Задача 3.

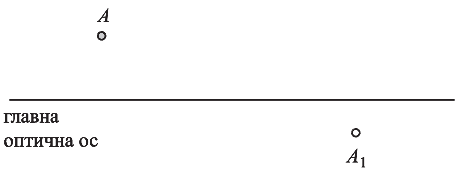
Част 1. **(8т)**

На Фиг. 3a, 3b и 3c са показани главната оптична ос на леща, светеща точка A и нейният образ A_1 от лещата. За всеки един от трите случая определете:

а) вида на образа – действителен или недействителен;

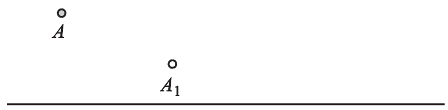
б) вида на лещата – събирателна или разсейвателна;

в) чрез построение мястото на лещата и на нейния фокус.



Фиг. 3a.

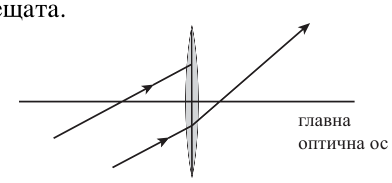
Фиг. 3b.



Фиг. 3c.

Част 2. **(2т)**

Върху събирателна леща падат два успоредни лъча. На фиг. 3d е показан ходът на единия лъч, след пречупването му от лещата. Постройте хода на втория лъч и определете мястото на фокуса на лещата.



Фиг. 3d.

Указание. Когато падащите върху събирателна леща успоредни лъчи не са успоредни на главната оптична ос, след като се пречупят от лещата, те се събират в една точка, която лежи върху права, перпендикулярна на главната оптична ос и преминаваща през фокуса на лещата.

Решения на темата за 7. клас

Задача 1.

Част 1. Да означим с S_2 пътя, изминат от автобуса в дъжда и с $S_3 = 60$ km последната част от пътя. По план пътят $S_1 + S_2$ е трябвало да бъде изминат със скорост v_1 за време

$$t = \frac{S_2}{v_1} + \frac{S_3}{v_1}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Според условието на задачата автобусът изминава този път за планираното време, но в двете му части се движи с различна скорост:

$$t = \frac{S_2}{v_2} + \frac{S_3}{v_3}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Приравняваме десните страни на двете равенства и определяме пътя, изминат по време на дъжда:

$$S_2 = \frac{(v_3 - v_1)v_2}{(v_1 - v_2)v_3} S_3 \qquad \textbf{(2т)}$$

$$S_2 = 75 \text{ km} \qquad \textbf{(1т)}$$

Продължителността на дъжда е

$$t_2 = S_2/v_2 = 1,5 \text{ h} \qquad \textbf{(1т)}$$

б) $S_1 + S_2 = 135$ km – това разстояние е по-голямо от разстоянието от Пловдив до Хасково (около 80 km). Следователно учениците са от Плевен. (Разстоянието от Плевен до Хасково е около 250 km.) **(1т)**

Част 2. Обемът на използваното за изготвянето на кубчето метално фолио е

$$V = 6a^2 d \qquad \textbf{(1т)}$$

Плътността на метала е

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{6a^2 d} \qquad \textbf{(1т)}$$

$$\rho = 2,75 \text{ g/m}^3 \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 2.

Част 1. а) Съпротивленията на двата консуматора са

$$R_1 = \frac{U^2}{P} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$R_2 = \frac{(2U)^2}{P} = \frac{4U^2}{P} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 4 \qquad \textbf{(1т)}$$

б) Токът във веригата е

$$I = \frac{3U}{R_1 + R_2} = \frac{3P}{5U} \qquad \textbf{(1т)}$$

Мощността на тока през двата консуматора е

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{9}{25} P \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$P_2 = I^2 R_2 = \frac{36}{25} P \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$P_1 = 9 \text{ W} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$P_2 = 36 \text{ W} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Част 2. Токът във веригата е

$$I = \frac{P}{U_0} = 2 \text{ A} \qquad \textbf{(1т)}$$

От графиката определяме, че при ток $I = 2$ A напрежението върху лампата е

$$U = 4 \text{ V} \qquad \textbf{(2т)}$$

Напрежението върху резистора е

$$U_1 = U_0 - U = 2 \text{ V} \qquad \textbf{(1т)}$$

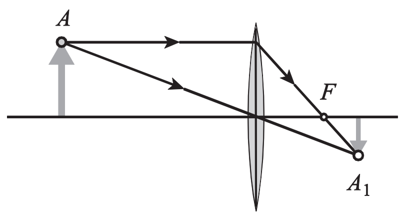
Съпротивлението на резистора е

$$R = U_1/I = 1\ \Omega \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 3. Част 1. За нагледност можем да приемем, че точка A е върхът на стрелка, която е перпендикулярна на главната оптична ос.

За Фиг. 3а: Предметът и образът са от различни страни на главната оптична ос (обърнат образ). Такъв образ е **действителен** (**1т**) и се получава от **събирателна леща**. **(0,5т)**

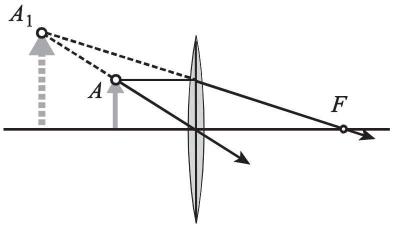
Лъчът, който свързва предмета A и образа A_1 (Фиг. 4а), пресича главната оптична ос в точка, която е център на лещата. **(1т)**



Фиг. 4а.

Лъчът, който е успореден на главната оптична ос, след пречупване от лещата преминава през нейния фокус F. **(0,5т)**

За Фиг. 3b: Предметът A и образът A_1 лежат от една и съща страна на главната оптична ос (прав образ). Образът е по-далече от оста – увеличен образ.

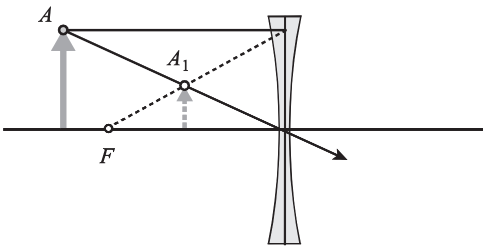


Фиг. 4b.

Образът е **недействителен** (**1т**), а лещата е **събирателна**. (**0,5т**).

Ходът на централния лъч и на успоредния лъч са показани на Фиг. 4b. За определяне на:

— мястото на лещата (**0,5т**)
— фокуса F (**0,5т**)



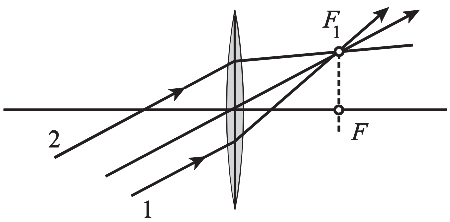
Фиг. 4c.

За Фиг. 3c: Образът е прав и умален. Такъв образ е **недействителен** (**0,5т**) и може да се получи само от **разсейвателна леща** (**1т**).

Ходът на централния лъч и на успоредния лъч са показани на Фиг. 4c. За определяне на:

— мястото на лещата (**0,5т**)
— фокуса F (**0,5т**)

Част 2. Прекарваме централен лъч (Фиг. 5), който е успореден на двата лъча. Той не се пречупва от лещата (**1т**). Лъч 1 и централният лъч се пресича в точка F_1. През точка F_1 преминава и лъч 2, след като се пречупи от лещата (**0,5т**). Спускаме перпендикуляр от точка F_1 към главната оптична ос и намираме положението на фокуса F на лещата. (**0,5т**)



Фиг. 4d.

Тема за 8. клас

Съставител: Виктор Иванов

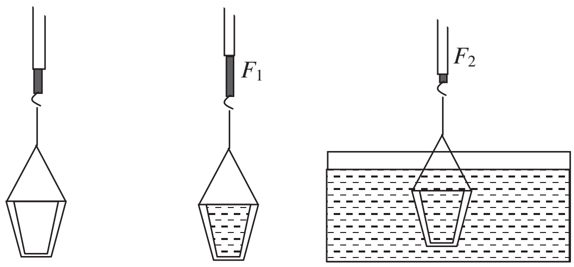
Във всички задачи приемете, че земното ускорение е $g = 10$ m/s^2.

Задача 1. *Ракета–модел*
Ракета-модел с маса $m = 0,2$ kg е изстреляна от земната повърхност вертикално нагоре с нулева начална скорост. Двигателят на ракетата създава постоянна сила $F = 10$ N, насочена нагоре в продължение на време $t_1 = 5$ s, след което се изключва. Пресметнете:

А) максималната скорост $v_{\max}$ на ракетата по време на изкачването; (**2,5т**)

Б) максималната височина H, която достига ракетата; (**4,5т**)

В) времето t от момента на изстрелването на ракетата до



Фиг. 1.

нейното приземяване. **(3т)**

Съпротивлението на въздуха не се отчита.

Задача 2. *Плаваща чаша*

Стъклена чаша е окачена на силомер чрез тънки леки нишки (вж. Фиг. 1а). Когато чашата е изцяло пълна с вода, нейното тегло е $F_1 = 4,1$ N (Фиг. 1б). Ако пълната чаша бъде потопена изцяло под вода, теглото ѝ става $F_2 = 0,45$ N (Фиг. 1в).

А) Пресметнете масата m на празната чаша. **(4т)**

Б) Колко е вместимостта V на чашата? **(2т)**

В) Какъв максимален обем V_1 вода може да бъде налят в чашата така, че тя да плава? **(4т)**

Данни:
плътност на вода $\rho_0 = 1000$ kg/m^3;
плътност на стъкло $\rho = 2500$ kg/m^3;

Задача 3. *Топче във въздух*

Ако оставим нагрято метално топче във въздух с по-ниска температура, то изстива поради топлината, която отдава на въздуха чрез топлообмен. Ако обаче допълнително духа вятър, топлообменът е по-интензивен и топчето изстива по-бързо. Опитно е установено, че количеството топлина Q, което топче с радиус R придава на въздуха за време t, е:

$$Q = (aR + bR^2v)(T - T_0)t,$$

където T е температурата на топчето, T_0 – температурата на околния въздух, v е скоростта на вятъра, а a и b са константи със стойности съответно:

$$a = 0,3\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m.K}} \quad \text{и} \quad b = 1300\ \frac{\mathrm{J}}{m^3.\mathrm{K}}\ .$$

А) Желязно топче с радиус $R = 1$ cm е загрято до температура $T = 100°$C и е оставено в неподвижен въздух с температура $T_0 = 20°$C. За колко време t топчето ще се охлади до температура $T_1 = 90°$C. За колко време t_1 топчето би се охладило до същата температура, ако към него насочим въздушна струя от вентилатор със скорост $v = 5$ m/s? **(4т)**

Б) Когато тяло със сферична форма се движи със скорост v в газ, му действа сила на съпротивление

$$f = kR^2v^2,$$

където k е коефициент на пропорционалност, характерен за дадения газ. За въздух при нормално атмосферно налягане и температура

$$k = 0,4\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

До каква температура T се загрява сферичен куршум с радиус $R = 1$ cm, който се движи със скорост $v = 400$ m/s в неподвижен въздух с температура $T_0 = 20°$C. **(3т)**

В) Вместо да бъде изстрелян, куршумът е пуснат да пада от голяма височина. След време той достига определена гранична скорост на падане. До каква температура се загрява куршумът преди да достигне земята? Температурата на въздуха е $T_0 = 20°$C. **(3т)**

Данни:
специфичен топлинен капацитет на желязото $c = 560$ J/(kg.K);
плътност на желязото $\rho = 7800$ kg/m^3;

Решения на темата за 8. клас

Задача 1. *Ракета-модел*

А) От II закон на Нютон следва, че докато двигателят работи, ракетата се издига с постоянно ускорение:

$$a = \frac{F - mg}{m} = \frac{F}{m} - g. \qquad \textbf{(1,5т)}$$

Тя достига най-голяма скорост в момента, когато двигателят се изключва

$$v_{\max} = at_1 = \left(\frac{F}{m} - g\right)t_1 = 200 \text{ m/s}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Б) В момента, когато двигателят на ракетата се изключва, тя се намира на височина

$$H_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{v_{\max}t_1}{2} = 500 \text{ m}. \qquad \textbf{(1т)}$$

След това ракетата продължава да се движи равнозакъснително с ускорение g и с начална скорост $v_{\max}$. Издигането продължава допълнително време

$$t_2 = \frac{v_{\max}}{g} = 20 \text{ s} \qquad \textbf{(1,5т)}$$

и ракетата се издига допълнително на:

$$H_2 = v_{\max}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_{\max}t_2}{2} = 2000 \text{ m}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Общата височина, на която се издига ракетата, е:

$$H = H_1 + H_2 = 2500 \text{ m}. \qquad \textbf{(1т)}$$

В) Изкачването продължава общо:

$$t_и = t_1 + t_2 = 25\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{(1т)}$$

След това ракетата започва да пада свободно с нулева начална скорост. Падането продължава време

$$t_п = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 22\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Общото време на полета е

$$t = t_и + t_п \approx 47\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 2. *Плаваща чаша*

А) Нека означим с V_4 собствения обем на чашата:

$$V_4 = \frac{m}{\rho}\ . \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Под вода на чашата действа Архимедова сила

$$F_A = \rho_0 V_4 g = mg\frac{\rho_0}{\rho}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Силомерът отчита равнодействащата на силата на тежестта

$$G = mg \qquad \textbf{(0,5т)}$$

и на Архимедовата сила

$$F_2 = G - F_A = mg\Big(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\Big). \qquad \textbf{(1т)}$$

Оттук намираме

$$m = \frac{F_2\rho}{g(\rho - \rho_0)} = 0,075\ \mathrm{kg} = 75\ \mathrm{g}$$

(0,5т за израз + 0,5т за число)

Б) Масата на налятата в чашата вода е

$$m_0 = \rho_0 V. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Следователно теглото на пълната чаша извън водата е

$$F_1 = (m + \rho_0 V)g. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

За търсената вместимост намираме

$$V = \frac{1}{\rho_0}\Big(\frac{F_1}{g} - m\Big)$$
$$= 3,35 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3 = 335\ \mathrm{cm}^3.$$

(0,5т за израз + 0,5т за число)

В) Ако в чашата е налята вода с обем V_1, силата на тежестта, действаща на чашата, е

$$G = (m + \rho_0 V_1)g. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

При максималния обем налята вода, чашата е потопена до горния си ръб и измества вода с обем

$$V' = V + V_4 = V + \frac{m}{\rho}\ . \qquad \textbf{(1т)}$$

Тогава на чашата действа Архимедова сила:

$$F_A = \rho_0 V' g = \rho_0\Big(V + \frac{m}{\rho}\Big)g.$$

(0,5т)

За да бъде чашата в равновесие, силата на тежестта трябва да се уравновесява с Архимедовата сила

$$(m + \rho_0 V_1)g = \rho_0\Big(V + \frac{m}{\rho}\Big)g. \qquad \textbf{(1т)}$$

Оттук намираме V_1:

$$V_1 = V - m\Big(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\Big)$$
$$= 2,9 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3 = 290\ \mathrm{cm}^3$$

(0,5т за израз + 0,5т за число)

Задача 3. *Топче във въздух*

А) Масата на топчето е:

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Докато се охлади до крайната температура, топчето губи топлина:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c(T - T_1). \qquad \textbf{(1т)}$$

Според условието, при охлаждане във въздух:

$$Q = (aR + bR^2 v)(T - T_0)t. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Следователно:

$$t = \frac{4\pi R^2 \rho c(T - T_1)}{3(a + bRv)(T - T_0)}. \qquad \textbf{(1т)}$$

За неподвижен въздух ($v = 0$) намираме:

$$t = \frac{4\pi R^2 \rho c(T - T_1)}{3a(T - T_0)} \approx 762 \text{ s} \approx 13 \text{ min}.$$

(**за числена стойност 0,5т**)

При скорост $v = 5$ m/s получаваме $t_1 \approx 3,5$ s.

за числена стойност 0,5т

Б) От I принцип на термодинамиката следва, че работата, която извършва силата на триене за време t,

$$A = kR^2 v^2 s \qquad \textbf{(0,5т)}$$

се трансформира в количество топлина, което топчето отдава на въздуха:

$$Q = (aR + bR^2 v)(T - T_0)t. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Като вземем предвид, че:

$$s = vt, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

получаваме:

$$kR^2 v^3 = (aR + bR^2 v)(T - T_0). \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Следователно:

$$T = T_0 + \frac{kRv^3}{a + bRv} \approx 69°\text{C}. \qquad \textbf{(1т)}$$

В) Топчето достига скорост, при която се уравновесяват силата на тежестта и сълата на съпротивление:

$$kR^2 v^2 = mg. \qquad \textbf{(1т)}$$

Като вземем предвид, че:

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

намираме установената скорост на спускане:

$$v = \sqrt{\frac{4\pi \rho g R}{3k}} = 90,4 \text{ m/s}. \qquad \textbf{(1т)}$$

(Междинната числена стойност не е задължителна)

След като заместим тази стойност във формулата, изведена в т. Б, намираме:

$$T = T_0 + \frac{kRv^3}{a + bRv} \approx 22,5°\text{C}$$

(**(за числена стойност) 0,5т**)

Тема за 9. клас
Съставител: Мирослав Абрашев

Задача 1. *Еквивалентен източник на напрежение*
Известно е, че два последователно (успоредно) свързани резистори или кондензатори в електрична схема могат да се заменят с един, наречен еквивалентен на тях. Тогава токовете, протичащи през отделните части на схемата, както и напреженията върху отделните нейни елементи, ще се запазят.

а) Дайте определение на източник на напрежение, който ще наричаме еквивалентен на други два източника на напрежение, свързани последователно или успоредно. **[2т]**

б) Намерете електродвижещото напрежение E и вътрешното съпротивление r на еквивалентния източник на напрежение на два последователно свързани източника на напрежение. Те имат съответно електродвижещо напрежение E_1 и E_2 и вътрешно съпротивление r_1 и r_2. **[2т]**

в) Намерете електродвижещото напрежение E и вътрешното съпротивление r на еквивалентния източник на напрежение на два успоредно свързани източника. Те имат съответно електродвижещо напрежение E_1 и E_2 и вътрешно съпротивление r_1 и r_2. **[6т]**

Задача 2. *Съпротивление на паралелепипед.*

Правоъгълен паралелепипед с ръбове a_1, a_2 и a_3 е направен от вещество със специфично съпротивление ρ. Измерва се електричното му съпротивление между две срещуположни стени. Когато се измерва съпротивлението между стените, намиращи се на разстояние a_1 една от друга, съпротивлението му е $R_1 = 0,10\,\Omega$, между стените на разстояние a_2 е $R_2 = 0,40\,\Omega$, а между стените на разстояние a_3 е $R_3 = 0,90\,\Omega$. Обемът на паралелепипеда е $V = 6,0\ \mathrm{mm}^3$. Изчислете:

а) специфичното съпротивление ρ на веществото **[4т]**.

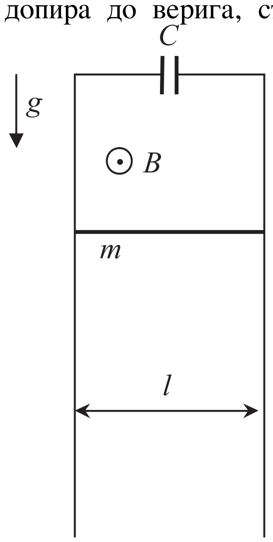
б) дължината на ръба a_1 **[2т]**.

в) дължината на ръба a_2 **[2т]**.

г) дължината на ръба a_3 **[2т]**.

Задача 3. *Падаща проводяща пръчка в магнитно поле.*

Проводяща пръчка с маса m и дължина l започва да се движи под действие на силата на тежестта като се допира до верига, съставена от



неподвижен П-образен проводник, свързан към кондензатор с капацитет C. Първоначално кондензаторът е разреден. Електричното съпротивление на пръчката и веригата са пренебрежимо малки. Цялата верига се намира в хоризонтално постоянно еднородно магнитно поле с големина на магнитната индукция B. Земното ускорение е g. Триенето се пренебрегва.

а) Намерете връзка между скоростта на пръчката $v(t)$ и натрупания електричен заряд $q(t)$ върху плочите на кондензатора в произволен момент t. **[3т]**

б) Намерете връзка между ускорението на пръчката $a(t)$ и протичащия електричен ток $I(t)$ във веригата в произволен момент t. **[1т]**

в) Намерете формула за ускорението на пръчката $a(t)$, изразено чрез параметрите g,B, C, l и m. **[3 т.]**

г) Изчислете пълната енергия на системата $E(t)$ в произволен момент време t. Сравнете я с тази в началния момент. **[3 т.]**

Решения на темата за 9. клас

Задача 1. *Еквивалентен източник на напрежение*

а) Еквивалентен източник на напрежение на други два източника на напрежение (последователно или успоредно свързани) ще наричаме такъв, който като се включи към резистор с произволно електрично съпротивление ще създаде същия ток, както ако се включат двата източника на напрежение. **[2т]**

б) Ако се включат два последователно свързани източника на напрежение съответно с електродвижещо напрежение E_1 и E_2 и вътрешно съпротивление r_1 и r_2 към резистор със съпротивление R, от закона на Ом следва:

$$E_1 + E_2 = I(r_1 + r_2) + IR. \quad \textbf{(1т)}$$

Ако се включи еквивалентният източник на напрежение, то: $E = Ir + IR$. За да е един и същ токът при произволна стойност на R, трябва

$$E = E_1 + E_2 \quad \text{и} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$r = r_1 + r_2 \,. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

в) Нека токът през първия източник е I_1, а през втория е I_2. Тогава токът през резистора е

$$I = I_1 + I_2 \,. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Напрежението върху резистора е

$$U = IR \,. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Толкова ще бъде напрежението и между полюсите на всеки един от източниците:

$$U = E_1 - I_1 r_1 \,, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$U = E_2 - I_2 r_2 \,. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Изразявайки I_1 и I_2 и замествайки ги в израза за общия ток, получаваме

$$I = \frac{E_1 - U}{r_1} + \frac{E_2 - U}{r_2}\,.$$

Тъй като $U = IR$, получаваме

$$I = \frac{E_1 - IR}{r_1} + \frac{E_2 - IR}{r_2}\,. \qquad \textbf{(1т)}$$

След превеждане към общ знаменател, изразът се преобразува в

$$r_1 r_2 I = E_1 r_2 + E_2 r_1 - IR(r_1 + r_2),$$

който може да се запише във вида

$$\frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} I + RI\,.$$

Следователно имаме

$$E = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} \qquad \textbf{(1,5т)}$$

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\,. \qquad \textbf{(1,5т)}$$

Задача 2. *Съпротивление на паралелепипед*

а) За трите измервания на съпротивлението на паралелепипеда имаме

$$R_1 = \frac{\rho a_1}{a_2 a_3}\,,\quad R_2 = \frac{\rho a_2}{a_1 a_3}\,,\quad R_3 = \frac{\rho a_3}{a_1 a_2}\,. \qquad \textbf{(1т)}$$

Обемът на паралелепипеда е

$$V = a_1 a_2 a_3\,. \qquad \textbf{(0,5)}$$

Ако умножим равенствата почленно, получаваме

$$R_1 R_2 R_3 = \frac{\rho^3 a_1 a_2 a_3}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} = \frac{\rho^3}{V}\,.$$

Следователно

$$\rho = \sqrt[3]{R_1 R_2 R_3 V}$$
$$= \sqrt[3]{0,10\Omega.0,40\Omega.0,90\Omega.6,0.10^{-9}\mathrm{m}^3} \qquad \textbf{(1,5т)}$$
$$= 6,0 \times 10^{-4}\ \Omega.\mathrm{m}. \qquad \textbf{(1т)}$$

б) Отношението на съпротивленията е

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Аналогично имаме

$$\frac{R_1}{R_3} = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2.$$

Изразявайки a_2 и a_3, получаваме

$$R_1 = \frac{\rho a_1}{a_1\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}a_1\sqrt{\frac{R_3}{R_1}}}\,. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

След опростяване

$$a_1 = \frac{\rho}{\sqrt{R_2 R_3}} \qquad \textbf{(0,5т)}$$
$$= \frac{6,0.10^{-4}\Omega.\mathrm{m}}{\sqrt{0,40\Omega.0,90\Omega}} = 1,0\ \mathrm{mm}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

в) По същия начин намираме,

$$a_2 = \frac{\rho}{\sqrt{R_1 R_3}} \qquad \textbf{(1т)}$$
$$= \frac{6,0 \times 10^{-4}\Omega.\mathrm{m}}{\sqrt{0,10\Omega.0,90\Omega}} = 2,0\ \mathrm{mm}. \qquad \textbf{(1т)}$$

г) Аналогично имаме

$$a_3 = \frac{\rho}{\sqrt{R_1 R_2}} \qquad \textbf{(1т)}$$
$$= \frac{6,0 \times .10^{-4}\Omega.\mathrm{m}}{\sqrt{0,10\Omega.0,40\Omega}} = 3,0\ \mathrm{mm}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 3. *Падаща проводяща пръчка в магнитно поле*

а) При движение на пръчката със скорост $v(t)$ в контура, съдържащ пръчката, П-образния проводник и кондензатора, се индуцира напрежение

$$E_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\Delta S}{\Delta t} = -Blv(t).$$ **(1т)**

То трябва да е равно на напрежението върху кондензатора

$$U = \frac{q(t)}{C}.$$ **(1т)**

Следователно

$$q(t) = CBlv(t).$$ **(1т)**

б) Като приложим това равенство за два съседни момента, имаме

$$q(t+\Delta t) - q(t) = CBlv(t+\Delta t) - CBlv(t).$$ **(0,5т)**

Разделяйки на Δt, получаваме

$$I(t) = CBla(t).$$ **(0,5т)**

в) От втория закон на Нютон за движението на пръчката имаме

$$mg - BlI(t) = ma(t)$$ **(1т)**

След заместване на $I(t)$ достигаме до

$$a(t) = \frac{g}{1 + \dfrac{B^2l^2C}{m}} = \text{const},$$ **(2т)**

което означава, че пръчката пада с постоянно ускорение.

г) Нека след време t пръчката е паднала с h. Ако приемем, че отчитаме височината от първоначалното положение на пръчката, то потенциалната енергия на пръчката е

$$E_{\text{пот}}(t) = -mgh(t) = -mg\frac{1}{2}at^2.$$ **(0,5т)**

Кинетичната енергия в този момент е

$$E_{\text{кин}}(t) = \frac{mv(t)^2}{2} = \frac{ma^2t^2}{2}.$$ **(0,5т)**

Електричната енергия, натрупана в кондензатора, е

$$E_{\text{ел}} = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{C^2B^2l^2v(t)^2}{2C} = \frac{CB^2l^2a^2t^2}{2}.$$ **(1т)**

Пълната енергия на системата е

$$E(t) = E_{\text{кин}}(t) + E_{\text{пот}}(t) + E_{\text{ел}}(t) = \frac{ma^2t^2}{2}\left(-\frac{g}{a} + 1 + \frac{CB^2l^2}{m}\right) = 0.$$ **(1т)**

Следователно пълната енергия на системата се запазва, като потенциалната енергия на пръчката се трансформира в кинетична енергия на пръчката и електрична енергия на кондензатора.

Тема за 10–12. клас (първи ден)

Съставители: Мирослав Абрашев, Виктор Иванов, Максим Максимов, Димитър Мърваков

Задача 1. *Ефектът на доминото*

а) Трупче с маса m, което се движи с начална скорост v_0, удря челно друго трупче със същата маса, което е неподвижно. Ударът е идеално еластичен. Намерете скоростите v_1 и v_2 на трупчетата след удара. **[3т]**

Реалният удар между две тела никога не е идеално еластичен, тъй като част от началната им механична енергия се трансформира в топлина. В такъв случай е прието ударът да се характеризира с така наречения *коефициент на възстановяване* η, който се дефинира по следния начин:

$$\eta = \frac{v'_{\text{отн}}}{v_{\text{отн}}},$$

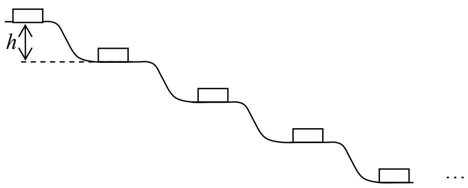
където $v_{\text{отн}}$ и $v'_{\text{отн}}$ са големините на относителните скорости на телата едно спрямо друго съответно преди и след удара. Коефициентът на възстановяване има стойности $0 \leq \eta \leq 1$ и зависи единствено от материалите, от които са изработени телата.

б) Както в точка а), ударът между трупчетата е челен, като преди удара едното трупче се движи със скорост v_0, а другото е неподвижно. Ударът обаче не е еластичен и се характеризира с коефициент на възстановяване η.

Определете скоростите v_1 и v_2 на трупчетата след удара. **[6т]**

Намерете промяната ΔU на вътрешната енергия на трупчетата в резултат на удара помежду им. **[2т]**

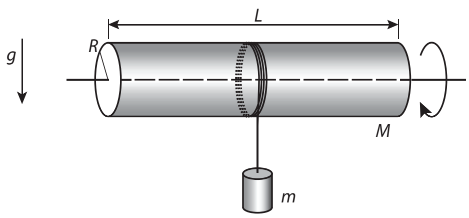
в) Голям брой хоризонтални "тераси" са разположени една под друга през еднакви височини h. Еднакви трупчета, всяко с маса m, са поставени неподвижни – по едно на всяка тераса. На най-горното трупче е придадена много малка начална скорост, поради която то се хлъзга до долната тераса и удря следващото трупче. То на свой ред се хлъзга до третата тераса и удря поставеното на нея трупче и т.н. Намерете границата v_∞, към която клони скоростта на N-тото трупче, след като бъде ударено, когато $N \to \infty$.



Коефициентът на възстановяване при всички удари е η. Триенето между трупчетата и повърхността се пренебрегва. Земното ускорение е g. Приемете също така, че трупчетата се хлъзгат по повърхността, без да се отделят от нея. **[4т]**

Задача 2. *Въртящ се зареден цилиндър*

На фиг. 1 е показан дълъг кух тънкостенен цилиндър от диелектрик с радиус R, дължина L $(L \gg R)$ и маса M. Върху околната повърхност на цилиндъра е разпределен равномерно електричен заряд Q. По средата на цилиндъра е навита лека неразтеглива нишка, към свободния край на която е закачена теглилка с маса m. В началния момент системата е в покой. Освобождават теглилката и тя започва да се спуска надолу и да върти цилиндъра. Цилиндърът се върти без триене около геометричната си ос, която е разположена хоризонтално. Нишката не се хлъзга по повърхността на цилиндъра. Съпротивлението на въздуха не се отчита. Земното ускорение е g.



Фиг. 1.

Да означим с v скоростта на теглилката в момент, когато тя е изминала път s.

а) Изразете кинетичната енергия на теглилката и на цилиндъра като функция на скоростта v. **[2т]**

б) Изразете индукцията B на магнитното поле в цилиндъра като функция на скоростта v. **[4т]**

в) Покажете, че енергията W_B на магнитното поле в цилиндъра е правопропорционална на квадрата на скоростта: $W_B = \frac{1}{2}kv^2$. **[2т]**

Определете константата k. **[2т]**

г) Определете ускорението a на теглилката. **[5т]**

Полезни формули и информация:

Когато по дълга цилиндрична намотка (соленоид) тече ток I, той създава магнитно поле. Вътре в соленоида полето е приблизително еднородно и неговата индукция е

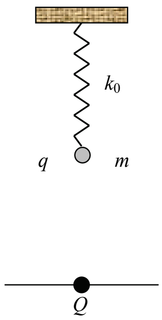
$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \mu_0 i,$$

където μ_0 е магнитната константа, N – броят на навивките, L – дължината на соленоида, а $i = NI/L$ е токът на единица дължина от соленоида. Извън соленоида полето се приема за равно на нула.

Плътността на енергията w_B на магнитното поле (магнитната енергия в единица обем от полето) се изразява с формулата $w_B = B^2/2\mu_0$.

Задача 3. *Заредено пружинно махало*

На вертикална пружина с коефициент на еластичност $k_0 = 90$ N/m е окачено метално топче с маса $m = 180$ g и електричен заряд $q = 1$ μC (фиг. 2). Когато махалото е неподвижно, под него се поставя неподвижен заряд $Q = q$ и то започва да извършва вертикални хармонични трептения. Разстоянието между равновесното положение на махалото при тези трептения и неподвижния заряд е $x_0 = 10$ cm. Във втория случай под махалото се поставя неподвижен заряд $Q = -q$ и то започва да трепти хармонично. Разстоянието между равновесното положение на махалото при тези трептения и неподвижния заряд е също $x_0 = 10$ cm. Константата в закона на Кулон е $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \times 10^9$ N.m^2/C^2.



Фиг. 2.

а) Намерете амплитудите A_1 и A_2 на трептене на махалото в двата случая. **[2т]**

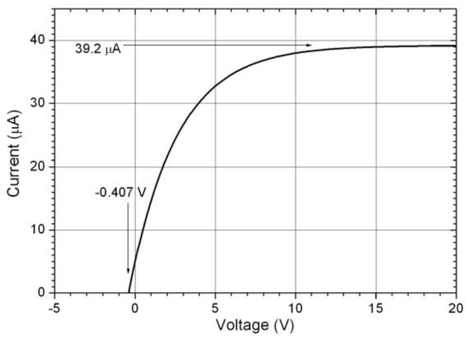
б) Определете разстоянието r между равновесните положения на махалото в първия и втория случай. **[2т]**

в) Намерете коефициентите на еластичност k_1 и k_2 на връщащите сили, под действие на които се извършват хармоничните трептения в първия и втория случай, ако отместването x от равновесното положение е много по-малко от x_0. **[9т.]**

г) Пресметнете периодите на трептене T_1 и T_2. **[2т]**

Задача 4. *Вакуумен фотодиод*

Вакуумният фотодиод представлява вакуумиран кварцов балон, на който от вътрешната страна е изпарен тънък слой метал, който през балона може да се осветява със светлина. Този електрод се нарича катод. Другият електрод не може да се осветява. Между тези два електрода се подава напрежение и се измерва токът през фотодиода. При облъчване на фотодиода с монохроматична светлина с дължина на вълната $\lambda = 488,0$ nm и мощност $P = 1,000$ mW се наблюдава следната зависимост на тока през фотодиода от електродвижещото напрежение на източника:



Метал	A, eV	Метал	A, eV
Ba	2,52	Rb	2,26
Na	2,36	Cs	2,14
K	2,29		

а) Изчислете отделителната работа A (в eV) на метала, от който е направен фотокатода? Кой от изброените в таблицата метали е използван? **[5т]**

б) Изчислете в какъв интервал е дължината на вълната на видима светлина, с която като осветяваме фотокатода, през него може да тече ток? **[5т]**

в) Квантов добив η наричаме отношението на избитите от фотокатода електрони и падналите върху него фотони. Колко процента е квантовият добив η на този фотокатод? **[5т]**

константа на Планк: $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s
ел. заряд на електрона: $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C
скорост на светлината: $c = 3,00 \times 10^{8}$ m/s

Решения на темата за 10–12. клас (първи ден)

Задача 1. *Ефектът на доминото*

а) При еластичен удар са изпълнени законите за запазване на импулса и на механичната енергия:

(1) $$mv_0 = mv_1 + mv_2$$

(2) $$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

От тях намираме, че скоростите на трупчетата след удара са:

(3) $$v_1 = 0$$

(4) $$v_2 = v_0$$

т.е. падащото трупче спира, а второто поема цялата му кинетична енергия.

б) При нееластичен удар е изпълнен само законът за запазване на импулса

(5) $$mv_0 = mv_1 + mv_2.$$

Относителната скорост на трупчетата преди удара е

(6) $$v_{\text{отн}} = v_0$$

а след удара:

(7) $$v'_{\text{отн}} = v_2 - v_1.$$

От дефиницията на коефициента на възстановяване следва:

(8) $$v_2 - v_1 = \eta v_0.$$

Решаваме уравненията (5) и (8) като система, откъдето определяме

(9) $$v_2 = \frac{1+\eta}{2} v_0$$

(10) $$v_1 = \frac{1-\eta}{2} v_0$$

От II принцип на термодинамиката следва:

(11) $$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \Delta U,$$

откъдето получаваме

(12) $$\Delta U = \frac{(1-\eta^2)mv_0^2}{4}.$$

в) Нека скоростта на N-тото трупче, след като бъде ударено, е v_N. От закона за запазване на механичната енергия следва, че то ще достигне намиращата се под него тераса със скорост:

(13) $$v'_N = \sqrt{v_N^2 + 2gh},$$

която играе ролята на начална скорост при удара с N+1-вото трупче. Като използваме формула (9), намираме скоростта на N+1-вото трупче след удара с N-тото:

(14) $$v_{N+1} = \frac{1+\eta}{2}\sqrt{v_N^2 + 2gh}.$$

Понеже $v_N \to v_\infty$ и $v_{N+1} \to v_\infty$, след граничен преход в двете страни на уравнение (14), намираме:

(15) $$v_\infty = \frac{1+\eta}{2}\sqrt{v_\infty^2 + 2gh}.$$

Оттук определяме граничната скорост на трупчетата:

(16) $$v_\infty = \frac{1+\eta}{\sqrt{(1-\eta)(3+\eta)}}\sqrt{2gh}.$$

Схема на оценяване **Елемент от решението**	**Точки**
Прилага закона за запазване на импулса	1,0
Прилага закона за запазване на енергията	1,0
Получава израз за скоростта v_1	0,5
Получава израз за скоростта v_2	0,5
Общо по т. а	**3,0**
Прилага закона за запазване на импулса	1,0
Изразява относителната скорост преди удара	1,0
Изразява относителната скорост след удара	1,0
Прилага дефиницията за коефициента η	1,0
Получава израз за скоростта v_1	1,0
Получава израз за скоростта v_2	1,0
Прилага II принцип на ТД за удара	1,0
Получава израз за ΔU	1,0
Общо по т. б	**8,0**
Прилага ЗЗЕ и намира скоростта при спускане на по-долно стъпало	1,0
Изразява скоростта на следващото трупче след удара	1,0
Получава уравнение за v_∞ след граничен преход	1,0
Намира окончателен израз за v_∞	1,0
Общо по т. в	**4,0**
Общо за задачата	**15,0**

Задача 2. *Въртящ се зареден цилиндър*

а) Кинетичната енергия на теглилката е

$$mv^2/2. \qquad \textbf{(1т)}$$

Скоростта на всички точки от повърхността на цилиндъра е равна на скоростта v на теглилката. (Нишката е в покой спрямо повърхността – не се хлъзга по нея.) Тъй като цилиндърът е тънкостенен, всички точки от него практически се намират на повърхността и се движат със скорост v.

Следователно кинетичната енергия на цилиндъра е

$$\frac{Mv^2}{2}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Кинетичната енергия на системата е

$$W_k = \frac{(M+m)v^2}{2}.$$

б) При въртенето на цилиндъра електричните заряди се движат със скорост v и описват окръжности, т.е. по повърхността на цилиндъра тече електричен ток, подобен на тока, който тече по цилиндрична намотка (соленоид). Да разгледаме мислена неподвижна линия, която преминава през повърхността на цилиндъра и е успоредна на оста му. За малък интервал от време Δt през тази линия (сечение на проводника, по който тече ток) преминава електричен заряд

$$\Delta q = \left(\frac{Q}{2\pi RL}\right) Lv\Delta t,$$

където изразът в скобите е зарядът на единица площ от повърхността на цилиндъра. Електричният ток е

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{Q}{2\pi R}v. \qquad \textbf{(2т)}$$

Токът на единица дължина на цилиндъра е

$$i = \frac{I}{L} = \frac{Q}{2\pi RL}v. \qquad \textbf{(1т)}$$

Магнитното поле на тока е

$$B = \mu_0 i = \frac{\mu_0 Q}{2\pi RL} v. \qquad \textbf{(1т)}$$

в) *Вариант 1 (от общи съображения).* От 9. клас знаем, че енергията на магнитното поле на ток, който тече по проводник, е пропорционална на квадрата на тока: $W_B = \frac{1}{2} L I^2$, където L в случая е индуктивността на проводника. Токът, от друга страна, е пропорционален на скоростта v на насочено движение на електричните заряди. Следователно

$$W_B = \frac{kv^2}{2}. \qquad \textbf{(2т)}$$

Вариант 2 (пълно решение). Плътността на енергията на магнитното поле е

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 Q^2}{8\pi^2 R^2 L^2} v^2. \qquad \textbf{(1т)}$$

Енергията на магнитното поле е

$$\begin{aligned} W_B &= w_B(\pi R^2 L) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}\right) v^2. \end{aligned} \qquad \textbf{(2т)}$$

Следователно

$$W_B = \frac{1}{2} k v^2, \text{ а } k = \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}. \qquad \textbf{(1т)}$$

г) Да приемем, че в началното положение, когато системата е в покой, гравитационната потенциална енергия на теглилката е нула. Когато теглилката измине път s, нейната потенциална енергия е

$$W_g = -mgs. \qquad \textbf{(1т)}$$

От закона за запазване на енергията следва равенството

$$W_k + W_B + W_g = 0 \text{ или}$$
$$\frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{1}{2} k v^2 - mgs = 0 \qquad \textbf{(1т)}$$

Записваме горното равенство във вида

$$s = \frac{1}{2} \frac{(M+m+k)}{mg} v^2.$$

От друга страна, при равноускорително движение без начална скорост е в сила равенството

$$s = \frac{v^2}{2a}.$$

Като сравним двете равенства, стигаме до извода, че теглилката се движи равноускорително **(1т)**

Нейното ускорение е

$$a = \frac{mg}{M+m+k}; \qquad \textbf{(1т)}$$

$$a = \frac{mg}{M + m + \dfrac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}}. \qquad \textbf{(1т)}$$

Забележка. Задачата има и друго решение, което дава възможност за по-задълбочено вникване във физиката на процесите – каква е природата на силата, която забавя въртенето на цилиндъра.

Магнитното поле в цилиндъра е променливо. Съгласно закона на Фарадей, то индуцира вихрово електрично поле. От симетрията следва, че силовите линии на вихровото електрично поле са концентрични окръжности с център върху оста на диска. От закона на Фарадей

$$E(2\pi R) = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -(\pi R^2)\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

определяме интензитета на вихрово-то поле

$$E = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi L}\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi L}a.$$

На заредения цилиндър вихровото електрично поле действа с електрична сила $F = QE$. Тази сила създава въртящ момент $M = FR = QER$, който съгласно правилото на Ленц препятства въртенето на диска. Уравнението на моментите за въртенето на диска е

$$RT + M = \varepsilon I.$$

Ъгловото ускорение е $\varepsilon = a/R$, инерчният момент на тънкостенния цилиндър е $I = MR^2$. Силата на опъване на нишката T изразяваме от уравнението за постъпателното движение на теглилката $mg - T = ma$. След заместване на всички величини в уравнението на моментите получаваме

$$m(g-a)R - \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}aR = \frac{a}{R}MR^2,$$

откъдето определяме ускорението

$$a = \frac{mg}{M + m + \dfrac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}}.$$

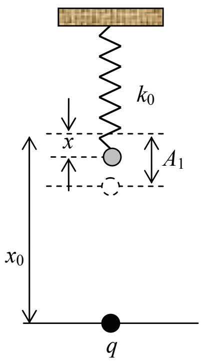
Задача 3. *Заредено пружинно махало*

а) Тъй като трептенето на махалото започва от неподвижно състояние, амплитудата му на трептене е равна на разстоянието до равновесното положение при наличие на втория заряд. Тогава в равновесие от равенството на еластичната сила на свитата (фиг. 1) или разтегнатата (фиг. 2) пружина и на силата на кулоново отблъскване или привличане имаме

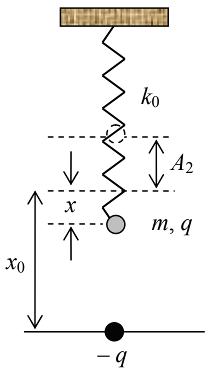
$$k_0 A_1 = k_0 A_2 = k\frac{q^2}{x_0^2}, \qquad \textbf{(1т)}$$

и за амплитудата на трептене получаваме

$$A_1 = A_2 = \frac{kq^2}{k_0 x_0^2}. \qquad \textbf{(1т)}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

б) Ще отбележим, че в първия случай равновесното положение се намира на разстояние A_1 над първоначалното положение на махалото, а във втория случай – на разстояние A_2 под първоначалното положение на махалото. Тогава имаме

$$r = A_1 + A_2 \approx 2 \text{ cm}. \qquad \textbf{(2т)}$$

в) За да намерим коефициентите на еластичност на връщащата сила нека тялото с маса m е отклонено на разстояние x надолу от равновесното положение (фиг. 1).

Тогава за големината на връщащата сила в първия случай имаме

$$F_1 = \frac{kq^2}{(x_0 - x)^2} - k_0(A_1 - x)$$
$$= k_0x + kq^2\Big(\frac{1}{(x_0 - x)^2} - \frac{1}{x_0^2}\Big)$$
$$= k_0x + kq^2\Big(\frac{2x(x_0 - x)}{x_0^2(x_0 - x)^2}\Big). \quad \textbf{(3т)}$$

Като отчетем, че $x \ll x_0$, намираме

$$F_1 \approx \Big(k_0 + \frac{2kq^2}{x_0^3}\Big)x = k_1x. \quad \textbf{(1,5т)}$$

Във втория случай (фиг. 2) имаме

$$F_2 = k_0(A_2 + x) - \frac{kq^2}{(x_0 - x)^2}$$
$$= k_0x + kq^2\Big(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{(x_0 - x)^2}\Big)$$
$$= k_0x + kq^2\Big(\frac{-2x(x_0 + x)}{x_0^2(x_0 - x)^2}\Big), \quad \textbf{(3т)}$$

откъдето при $x \ll x_0$ намираме

$$F_2 \approx \Big(k_0 - \frac{2kq^2}{x_0^3}\Big)x = k_2x. \quad \textbf{(1,5т)}$$

г) Периодът на трептене в първия случай е

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0 + \dfrac{2kq^2}{x_0^3}}} \approx 0,26 \text{ s},$$

(1т)

а във втория случай имаме

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0 - \dfrac{2kq^2}{x_0^3}}} \approx 0,31 \text{ s}.$$

(1т)

Задача 4. *Вакуумен фотодиод*

а) Отделителната работа A на метала, от който е направен фотокатода, може да се изчисли от уравнението на Айнщайн за външния фотоефект:

$$hv = \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad \textbf{(1т)}$$

От дадената графика се вижда, че големината на спирачното напрежение е

$$U = 0,407 \text{ V}. \quad \textbf{(1т)}$$

Следователно

$$A = \frac{hc}{\lambda} - eU. \quad \textbf{(1т)}$$

След заместване получаваме

$$A = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}3,00 \times 10^8 \text{ m/s}}{488 \times 10^{-9} \text{ m}}$$
$$- 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}0,407 \text{ V}$$
$$= 3,42 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,14 \text{ eV}. \quad \textbf{(1т)}$$

Използваният метал е Cs. **(1т)**

б) За да тече ток през фотодиода, трябва

$$hv = \frac{hc}{\lambda} > A. \quad \textbf{(2т)}$$

Следователно

$$\lambda < \frac{hc}{A} = 582 \text{ nm}. \quad \textbf{(2т)}$$

Следователно видимата светлина трябва да има дължина на вълната

$$\lambda \in (400, 582)\ \mathrm{nm}. \qquad \textbf{(1т)}$$

в) От графиката се вижда, че при големи положителни стойности на напрежението, токът през фотодиода клони към стойност $I_{\text{нас}} = 39,2\ \mu$A (тази стойност се нарича ток на насищане) **(1т)**.

Това означава, че тогава всички електрони, напуснали фотокатода, достигат другия електрод. Следователно броят на електроните, напуснали фотокатода за 1 s, е

$$N_{\mathrm{e}} = I_{\text{нас}} \times 1\ \mathrm{s}/e. \qquad \textbf{(1т)}$$

Падналият брой фотони за една секунда е

$$N_{\mathrm{ph}} = \frac{P \times 1\ \mathrm{s}}{h\nu} = \frac{P \times 1\ \mathrm{s}.\lambda}{hc}. \qquad \textbf{(1т)}$$

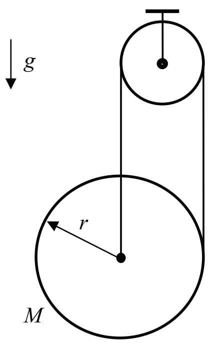
Следователно квантовият добив

$$\eta = \frac{I_{\text{нас}} hc}{eP\lambda} = 10,0\%. \qquad \textbf{(2т)}$$

Тема за 10–12. клас (втори ден)

Съставители: Мирослав Абрашев, Виктор Иванов, Димитър Мърваков

Задача 1. *Падащ диск*
На еднороден диск с маса M и радиус r е навита дълга неразтеглива нишка с пренебрежима маса. Свободният ѝ край е преметнат през неподвижна макара с пренебрежима маса m и е фиксиран на ос, минаваща през центъра на диска. Дискът се освобождава и започва да се движи надолу. Намерете:



а) ускорението a, с което дискът се движи вертикално надолу. **(4т)**

б) отношението $\varepsilon_M/\varepsilon_m$ на ъгловите ускорения на диска и макарата с неподвижна ос. **(2т)**

Задача 2. *Нагряване на газ*
Във вертикален затворен цилиндър има тежко бутало, което се движи без триене. Частите на съда, които са разделени от буталото, съдържат по един mol газ, който може да се разглежда като идеален. При температура T_0, еднаква за двете части на съда, отношението на обемите е $V : V' = 1 : 2$, където V е обемът на газа под буталото, а V' – на газа над буталото. С помощта на вграден нагревател с пренебрежим обем газът под буталото се нагрява, докато увеличи обема си два пъти. Намерете полученото от газа под буталото количество топлина Q като приемете, че стените на цилиндъра и бутало-

то са топлонепроводящи. Резултатът изразете чрез температурата T_0, универсалната газова константа R и показателя на адиабатата γ. Направете числена оценка за едноатомен и двуатомен газ. **(7т)**

Задача 3. *Електролитна вана*
В електролитна вана с дължина $L = 0,1$ m е налят електролит със специфично съпротивление $\rho = 1,0\ \Omega$.m и с плътност $\rho_1 = 1000$ kg/m^3. Между успоредни електроди, разположени перпендикулярно на дължината L, е подадено напрежение $U = 15$ V.

а) Колко е плътността j на тока, протичащ през ваната? **(2т)**

б) Положителният електрод е изработен от мед с плътност $\rho_2 = 8900$ kg/m^3 и с моларна маса $M = 0,064$ kg/mol. При протичане на ток през ваната, в електролита се отделят еднозарядни медни йони. С колко ще намалее дебелината на медния електрод за време $t = 1$ h? **(2,5т)**

в) Ваната е поставена в еднородно магнитно поле с индукция $B = 0,1$ T, насочена вертикално надолу. На какъв ъгъл θ спрямо хоризонта ще се наклони свободната повърхност на течността, когато тя се установи в равновесно положение? **(2,5т)**

Дефиниции и данни:

- Плътността на тока се дефинира като: $j = I/S$, където I е пълният ток, протичащ през повърхност с площ S, ориентирана перпендикулярно на посоката на протичане на тока.
- елементарен електричен заряд: $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C;
- константа на Авогадро: $N_A = 6,02 \times 10^{-23}$ mol^{-1};
- земно ускорение: $g = 9,8$ m/s^2.

Решения на темата за 10–12. клас (втори ден)

Задача 1. *Падаща макара*

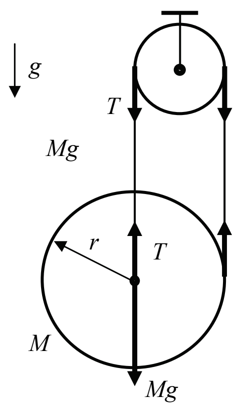
а) От втория закон на Нютон следва:

$$Mg - 2T = Ma. \qquad \textbf{(1т)}$$

От втория закон на Нютон за въртеливото движение следва:

$$Tr = I\varepsilon = Mr^2\varepsilon/2. \qquad \textbf{(1т)}$$

За да определим връзката между ускорението a и ъгловото ускорение ε,



да допуснем, че центърът на диска се премества на разстояние Δx надолу.

Тогава трябва да се развие допълнително нишка с дължина

$$\Delta l = 2\Delta x. \qquad \textbf{(0.5т)}$$

Следователно

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{r\Delta t} = \frac{2\Delta x}{r\Delta t} = \frac{2v}{r}\,.$$

По същия начин може да покажем, че и

$$\varepsilon = \frac{2a}{r}\,. \qquad \textbf{(0.5т)}$$

Елиминирайки силата на опъване на нишката T от първите две уравнения, получаваме

$$Mg - 2Mr\varepsilon/2 = Mg - 2Ma = Ma,$$

откъдето

$$a = g/3. \qquad \textbf{(1т)}$$

б) Тъй като при преместване на диска на разстояние Δx надолу, макарата се завъртва на ъгъл

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{r/2}\,, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а дискът се завъртва на ъгъл

$$\Delta\varphi = \frac{2\Delta x}{r}, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

то $\Delta\theta = \Delta\varphi$. Следователно

$$\varepsilon_M/\varepsilon_m = 1. \qquad \textbf{(1т)}$$

Задача 2. *Нагряване на газ*

Търсеното количество топлина е

$$Q = U_2 - U_1 + A', \qquad \textbf{(0,5т)}$$

където U_1 и U_2 са началната и крайната енергия на газа под буталото, а A' е работата, извършена от него. При всяко положение на буталото имаме

$$p = p_0 + p', \qquad \textbf{(0,5т)}$$

където $p_0 = \text{const}$ е налягането на буталото. Тогава

$$A' = A_1 + A_2, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

където при обем на цилиндъра V_0 имаме

$$A_1 = \frac{p_0 V_0}{3}\,, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

а A_2 може да се разглежда като работа на външната сила, която свива адиабатно газа над буталото, като

$$A_2 = U_2' - U_1'. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Вътрешната енергия на идеален газ зависи само от температурата. Като отчетем съотношението на Майер за един mol газ и определението на показателя на адиабатата

$$c_p - c_V = R, \qquad \frac{c_p}{c_V} = \gamma,$$

намираме

$$U_1 = U_1' = \frac{RT_0}{\gamma - 1}\,. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Тъй като за началните състояния имаме

$$\begin{aligned} p_1\frac{V_0}{3} &= RT_0, \\ p_1'\frac{2V_0}{3} &= RT_0, \end{aligned} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

тогава намираме

$$p_1' = p_0, \quad p_1 = 2p_0, \quad RT_0 = \frac{2p_0V_0}{3}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

При адиабатно свиване на газа над буталото имаме

$$p_1'\Big(\frac{2V_0}{3}\Big)^\gamma = p_2'\Big(\frac{V_0}{3}\Big)^\gamma, \quad p_2' = 2^\gamma p_0, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

при което намираме

$$\frac{p_1'\Big(\frac{2V_0}{3}\Big)}{T_0} = \frac{p_2'\Big(\frac{V_0}{3}\Big)}{T_2'}, \quad T_2' = 2^{\gamma-1}T_0, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

и получаваме

$$U_2' = \frac{2^{\gamma-1}}{\gamma-1}RT_0. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Аналогично получаваме

$$\frac{p_1\Big(\frac{V_0}{3}\Big)}{T_0} = \frac{p_2\Big(\frac{2V_0}{3}\Big)}{T_2},$$

$$T_2 = (2^\gamma + 1)T_0, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

$$U_2 = \frac{(2^\gamma+1)}{\gamma-1}RT_0.$$

След заместване намираме

$$Q = \frac{3.2^\gamma + \gamma - 3}{2(\gamma-1)}RT_0. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

За едноатомен газ имаме $\gamma_1 = 5/3$ и тогава

$$Q_1 \approx 6,1RT_0, \qquad \textbf{(0,25т)}$$

а за двуатомен газ при $\gamma_2 = 7/5$ получаваме

$$Q_2 \approx 7,9RT_0. \qquad \textbf{(0,25т)}$$

Задача 3. *Електролитна вана*

а) Електролитът във ваната може да се разглежда като проводник с дължина L и с напречно сечение $S = ah$, където a е широчината на ваната, а h е дълбочината на електролита. Тогава съпротивлението на електролита е:

$$R = \frac{\rho L}{S} \qquad \textbf{(0,5т)}$$

и през него протича ток:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho L}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Плътността на тока съответно е:

$$j = \frac{U}{\rho L} = \frac{15\ \text{V}}{1,0\ \Omega.\text{m}\ \times 0,1\ \text{m}} = 150\ \text{A/m}^2. \qquad \textbf{(1т)}$$

б) За дадения интервал от медния електрод ще се отделят йони с общ заряд:

$$q = It, \qquad \textbf{(0,2т)}$$

като техният брой ще бъде:

$$N = \frac{It}{e}. \qquad \textbf{(0,3т)}$$

Следователно масата на електрода ще намалее с:

$$\Delta m = \frac{N}{N_A}M = \frac{ItM}{N_Ae}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

От друга страна, ако дебелината на електрода набмалее с Δd, отделената маса може да се изрази като:

$$\Delta m = \rho_2 S\Delta d. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

Като вземем предвид, че: $I = jS$, получаваме:

$$\Delta d = \frac{jMt}{N_A e \rho_2} = \frac{150 \text{ A/m}^2 \times 0,064 \text{ kg/mol} \times 3600 \text{ s}}{6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 8900 \text{ kg/m}^3}$$
$$= 4,0 \times 10^{-5} \text{ m} = 40\ \mu\text{m}. \qquad \textbf{(1т)}$$

в) Да разгледаме малък цилиндричен елемент от електролита с дължина в направление на протичане на тока Δl и с напречно сечение ΔS, който граничи със свободната повърхност. През този елемент протича ток:

$$\Delta I = j\Delta S \qquad \textbf{(0,5т)}$$

и му действа хоризонтално насочена магнитна сила:

$$\Delta F = \Delta I B \Delta l = jB\Delta V, \qquad \textbf{(0,5т)}$$

където ΔV е обемът на елемента. Силата на тежестта, действаща на същия обем електролит, е:

$$\Delta G = g\rho_1 \Delta V. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

За да бъде даденият елемент в равновесие, е нужно резултантната на тези две сили да бъде перпендикулярна на свободната повърхност на електролита. Следователно за ъгъла на наклон на свободната повърхност получаваме:

$$\tan\theta = \frac{\Delta F}{\Delta G} = \frac{jB}{g\rho_1}$$
$$= 1,5 \times 10^{-3}. \qquad \textbf{(0,5т)}$$

При малки стойности на тангенса, имаме приблизително равенство:

$$\theta \approx \tan\theta = 1,5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$
$$= 0,088^\circ. \qquad \textbf{(0,5т)}$$