

### “Доказателство”, че $\pi = 2 \dots$ и една поука за физиците!?!

Христо Попов

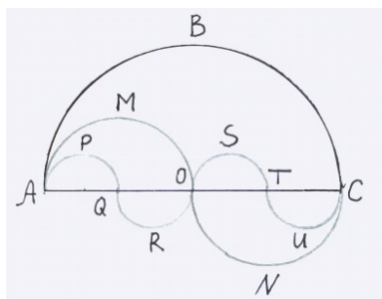
**Абстракт.** За доказване консервативността на някои сили в обучението по физика в средното училище понякога се използва граничен преход. С помощта на известен пример, който води до парадоксален резултат, обръщаме внимание върху опасностите, които крие подобен подход.

Числото  $\pi$  не е давало покой не само на математици и философи. Само фактът, че е невъзможно да се запише точната му стойност, дава повод на мнозина да се съмняват дори в реалното му съществуване (каквото и да означава последното). В подкрепа на това твърдение ще напомним, че преди повече от 15 години в интернет се разпространяваше една история, която за мнозина звучи невероятно. Депутатът от Алабама Леонард Лий Лоусън внесъл в законодателния орган на щата законопроект, според който стойността на  $\pi$  следва да се коригира и фиксира на числото 3 – точно! Вносителят действал от името на Соломоновото общество (група, поддържаща “традиционните ценности”, като под последното в САЩ обикновено се подразбират ценностите, прокламирани в Библията). Основание за това той вижда в Светото писание, в която ясно е казано (трета книга на царете 7:23), че “куполът на олтара на Соломоновия храм е бил десет лакътя напреки и с обиколка тридесет лакътя и още, че е бил кръгъл”<sup>1</sup>. Ясно е, че щом диаметърът на един кръг е “десет лакътя”, а обиколката – “тридесет лакътя”, то единственият извод е, че  $\pi = 30 : 10 = 3$ ! Предвиждало се, след като проектът стане закон, да се направят съответните корекции в учебниците по математика и т.н. И този законопроект за малко щял да бъде приет...!!!

Разбира се, има хора, които не вярват сляпо на всичко написано в древните книги и предпочитат да се доверят на това, което виждат. На тях предлагаме следния “извод”, основаващ се на показаната фигура.

---

<sup>1</sup>Съответният текст в българския превод на Светото писание гласи: “Направи още и леяното море, с устие десет лакътя широко, кръгло наоколо, а с височина пет лакътя; и връв от тридесет лакътя го измерваше околоръст.” Библия, Британско и чуждестранно библейско дружество, 1923, с. 319.



На нея отсечката  $AC$  е използвана като диаметър, върху който е построена полуокръжност  $ABC$ . Тъй като по определение  $\pi$  представлява коефициент, с който трябва да умножим диаметъра, за да получим дължината на *цялата* окръжност, очевидно  $|ABC| = \pi/2|AC|$ . За опростяване на писането ще приемем, че дължината на диаметъра е единица, т.е.  $|AC| = 1$ , така че изходното равенство е:

$$|ABC| = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Нека след това върху отсечката с единична дължина построим две еднакви полуокръжности  $AMO$  и  $ONC$  с диаметри съответно  $1/2$ . (Това, че едната от тях е начертана над, а другата – под отсечката, е направено само от “естетически” съображения и няма значение за по-нататъшните разсъждения.) Като отново използваме дефиницията за  $\pi$ , за дължината на всяка от двете дъги можем да запишем

$$|AMO| = |ONC| = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

така че сумата им се оказва отново:

$$|AMO| + |ONC| = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Следващата стъпка е лесно предвидима: върху отсечката  $AC$  построяваме четири полуокръжности  $APQ$ ,  $QRO$ ,  $OST$  и  $TUC$ , всяка с диаметър  $1/4$ . Лесно се пресмята, че сумата от дължините им е отново  $\pi/2$ , т.е.:

$$|APQ| + |QRO| + |OST| + |TUC| = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Предвидими са и стъпките по-нататък: трябва да построим върху  $AC$  вълнообразни линии, състоящи се съответно от 8, 16, 32 и т.н. еднакви полуокръжности. И на всеки етап дължината на получената вълнообразна линия, т.е. сумата от дължините на дъгите ще бъде една и съща – все  $\pi/2$ . Ясно е обаче, че при този безкраен процес точките на вълнообразните линии се приближават все повече и повече към точките на отсечката  $AC$  и в граничния случай двете линии ще съвпадат.

**Следователно и дължините на двете линии са равни.** И тъй като приехме, че  $|AC| = 1$ , оттук и от (1) получаваме:

$$\pi = 2.$$

Този абсурден резултат, разбира се, се дължи на погрешното твърдение, напечатано по-горе с по-плътен шрифт: от това, че точките на една крива се приближават безкрайно близко към точките на друга крива, съвсем **не следва**, че дължината на едната крива клони към дължината на другата крива. Тази контраинтуитивна математическа истина бе едно от първите неща, които студентите математици и физици чуваха от проф. Я. Тагамлицки на лекцията му за дължина на крива в курса по диференциално и интегрално смятане...

### Поуката за физиците

Нека погледнем на тези разглеждания по-общо. *Дължината на крива* представлява някаква функция, която зависи от формата на кривата, а ако тя не е затворена – и от положенията на началната и на крайната ѝ точка. Върху една крива може да се дефинират най-различни функции – дължината е само частен случай на такава. “Доказателството”, че  $\pi = 2$  свидетелства за наличие на функции, дефинирани върху сходяща безкрайна редица от криви, чиито стойностите не клонят към стойността на функцията върху граничната крива.

Физичната величина *работа на сила* е функция, дефинирана върху крива – кривата, по която се премества приложната точка на силата. В редица елементарни учебници любим прием за доказване на консервативността на някои сили (най-често гравитационната и електростатичната) е пресмятането на работата по произволна гладка крива да се представи като граничен случай на пресмятането ѝ по подходяща начупена крива с растящ брой чупки. При това *без доказателство* се приема, че работата по гладката крива е равна на границата на работата по начупените криви. С други думи, тихомълком се приема, че функцията *работа* не е от типа на функциите, към които принадлежи функцията *дължина* и за които подобно твърдение не е вярно.

### “Proof” that $\pi = 2 \dots$ and a Lesson for Physicists!?!

Ch. Popov

**Abstract:** In order to prove that some forces are conservative, we sometimes use a limiting process. With the help of a known example leading to a paradoxical result, we draw attention to the dangers of such an approach.