ФИЗИКА В ПОВЕЧЕ
*Физика: Методология на обучението* **2** (2014) 231–240

# Количествени резултати чрез качествени разглеждания

**Христо Попов**
СУ "Св. Климент Охридски", Физически факултет, 1172 София, бул. "Дж. Баучер" 5

**Съдържание**. Обсъждат се решенията на известна задача, изискваща студена вода да се нагрее за сметка на топлина от гореща вода, така че температурата на студената да стане по-висока от тази на горещата. Показано е как с качествени разглеждания може да се получат количествени резултати.

И друг път (вж. [1]) сме обръщали внимание върху факта, че при решаване на качествени задачи често са налице условия за преход към количествени разглеждания, които не само позволяват да се задълбочат знанията за физиката на явленията, но и да се развият редица полезни умения – например, умението да се задават смислени въпроси[1]. В училище физиката, и по-точно решаването на физични задачи предоставя практически неограничени възможности за стимулиране и изграждане у децата на това умение. За илюстрация на това твърдение по-долу използваме решението на една известна, в известен мисъл станала класическа качествена задача. Нейна особеност представлява фактът, че чрез разсъждения на **качествено** равнище може да се получат съществени **количествени** резултати, правилността на които после намира потвърждение в съответните пресмятания.

Условието на задачата, така както се среща например в [2] или [3], е следното:

> *В два съда е налята вода: в единия студена, в другия – гореща. Възможно ли е чрез топлопроводност температурата на водата в първия съд да се повиши над тази на водата във втория съд?*

В цитираните източници е показано, че отговорът на поставения въпрос е положителен, стига да разполагаме с поне един празен съд. Коментира се също при какви условия разликата между температурите на

[1] Да припомним, че майката на носителя на Нобелова награда (1944 г.) И. Раби в детството му го посрещала от училище всеки ден с въпроса: "Исак, успя ли днес да зададеш някакъв добър въпрос на учителя?". Забележете: не "Успя ли днес да отговориш, когато те изпитваха?", не "Научи ли днес нещо интересно и полезно?", а "**Успя ли да зададеш добър въпрос?"**!

водата във втория и в първия съд може да се направи максимална, практическото приложение на случая (в абонатните станции на топлофицираните жилища) и пр. Особеност на разглежданията в тях е, че количеството на водата в двата съда е фиксирано – примерно по един литър, а при търсене на условия за максимална температурна разлика се варира броят на празните съдове. За разлика от [2] и [3] по-долу разглеждаме случая, когато празният съд е само един, но може да се променят както масите на водата в двата съда, така и количеството вода, което се отлива в празния съд.

За целта ще преформулираме задачата така, че в нея да се откроят три междинни проблема:

*В два съда е налята вода: в единия – студена, в другия – гореща.*

1. *Покажете, че чрез топлопроводност температурата на водата във първия съд може да се повиши над тази на водата във втория съд.*
2. *Намерете при какво съотношение между масите на студената и на горещата вода се постига най-голяма разлика между крайните температури в двата съда.*
3. *Намерете връзката между максималната стойност на крайната температурната разлика и началната температурна разлика.*

**Решение на първия междинен проблем**

Да припомним решението на първия, чисто качествен проблем. Преди всичко обръщаме внимание на факта, че, ако в условието са говори не за съдове с вода, а примерно за две теглилки с различна температура, той е нерешим. Наистина в този случай разполагаме с една единствена възможност: да установим контактът между двете тела. Контактът би довел до пренос на количество топлина от горещото тяло към студеното, който би спрял при изравняване на температурите. Всяка последваща поява на температурна разлика между телата би нарушила втория принцип на термодинамиката.

Когато става дума за вода обаче, възможностите са повече, стига да разполагаме с трети, празен съд. Наличието на този съд позволява да оперираме не с две, а с три тела, защото течностите могат да се делят на части, след което отново да се смесват, без да е необходимо за това да извършваме работа. (Разбира се, в случая смесване на вода от първия и втория съд не е позволено.)

За повишаване температурата на водата в първия съд над тази във втория са достатъчни три операции:

1. Отливаме **малко** студена вода в празния съд (малко – в сравнение с количеството гореща вода) и го поставяме в контакт с горещата вода. Топлопроводността изравнява температурите в двата съда, като общата температура ще бъде **малко** по-ниска от началната температура на горещата вода.
2. Отдалечаваме третия съд (с малкото вода) и осъществяваме контакт между първия и втория съд. След прекратяване на топлообмена общата температура на водата в тези съдове ще бъде по-ниска от установилата се при първата операция температура на горещата вода.
3. Връщаме в първия съд водата от третия. Тъй като температурата на водата в третия е по-висока (вж. т. II), крайната температура в първия съд ще бъде по-висока от температурата във втория съд.

С това първият проблем е решен.

### Решение на втория проблем

За решаване на втория проблем използваме следното помощно твърдение, което е валидно само за тела, съставени от **едно и също вещество**, т.е. – когато телата имат еднакви специфични топлинни капацитети (в нашия случай – вода):

> *Общата температура, установена след контакт между две тела с различни маси и различни температури, е по-близка до температурата на по-масивното тяло.*

Ние ще използваме две следствия от това твърдение:

- *когато масите на телата са равни, общата температура е средно аритметична на началните температури на телата*;
- *когато масата на едното тяло е много по-голяма от масата на другото, то общата температура ще бъде много близка до началната температура на масивното тяло.*

И твърдението, и следствията са интуитивно ясни и представляват пряко следствие от уравнението на топлинния баланс.

Въпреки, че по-нататък разглежданията са качествени, удобно е да въведем означения за следните величини:

| | | |
|---|---|---|
| $m_1, t_1$ | – | масата и температурата на студената вода; |
| $m_2, t_2$ | – | масата и температурата на горещата вода ($t_2 > t_1$); |
| $m$ | – | масата на студената вода, отлята в третия съд ($m < m_1$); |
| $t'$ | – | общата температура, установила се при първата операция (при контакта между третия и втория съд); |

$t''$ – общата температура, установила се при втората операция (при контакта между втория и първия съд);
$t'''$ – общата температура, установила се при третата операция (при връщане на водата от третия в първия съд).

Нашата цел е да намерим при какво съотношение между масите $m_1$ и $m_2$ разликата $\Delta t = t''' - t''$ между крайните температури на водата в първия и във втория съд е максимална. Този случай се реализира, ако при **всяка** от първите две операции постигнем **едновременно** и максимално понижение на по-високата температура, и максимално повишение на по-ниската температура.

Да разгледаме първата операция. Съгласно с второто следствие от помощното твърдение, максимално понижение на температурата на водата във втория съд ще постигнем, ако масата на студената вода в третия съд е много по-голяма от масата на водата във втория съд (т.е. – при $m \gg m_2$). При това обаче повишението на температурата на студената вода ще бъде нищожно! Според първото следствие, **едновременно** максимално понижение на едната температура и максимално повишение на другата са възможни само при равенство на двете маси (т.е., при $m = m_2$).

По аналогичен начин при втората операция понижението на температурата във втория съд и повишението на температурата в първия съд ще бъдат максимални, ако останалата вода в първия съд е колкото водата във втория съд (т.е., при $m_1 - m = m_2$).

С други думи, и при първата, и при втората операция количеството вода, която поставяме в контакт с втория съд трябва да е равно на количеството вода в него. А това означава, че началното количество студена вода трябва да бъде два пъти по-голямо от количеството на горещата вода:

$$m_1 = 2m_2. \tag{1}$$

Равенство (1) представлява решение на втория проблем. То осигурява, че при всяка от двете първи операции може да се постигне максимално понижение на температурата на горещата вода. Третата операция в случая е без значение, защото липсата на топлинни загуби при трите операции гарантира, че максималното понижение на $t_2$ е съпроводено непременно с едновременно максимално повишение на $t_1$.

### Решение на третия проблем

При решаване на третия проблем използваме, че при всяка от трите операции осъществяваме контакт между равни количества вода. Тогава, според първото следствие на помощното твърдение:

- при първата операция общата температура е:

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2};$$

- при втората операция общата температура е:

$$t'' = \frac{t' + t_2}{2};$$

- при третата операция общата температура е:

$$t''' = \frac{t' + t''}{2}.$$

От последните три равенства лесно определяме интересуващата ни максимална стойност на разликата между температурите на водата в първия и във втория съд:

$$\Delta t = t''' - t'' = \frac{t_2 - t_1}{8}\,, \tag{2}$$

т.е. максималната окончателна температурна разлика е 1/8 от началната температурна разлика (обаче – с обратен знак, защото $t'''$ е температурата на водата в първия, а $t''$ – на водата във втория съд!).

И така, равенства (1) и (2) представляват отговор на поставените въпроси. Вижда се, че до отговора на втория проблем – количествения резултат (1), стигнахме наистина с чисто качествени аргументи. Може да се смята, че дори и резултатът (2) е получен преимуществено с качествени средства, защото не се наложи да изписваме уравнението на топлинния баланс и да решаваме системи от уравнения с няколко неизвестни.

### Количествени разглеждания

Не е изключено приведените аргументи да оставят усещане за недостатъчна обоснованост, за недоказаност. (Подозрение може да падне върху изрази от рода на “***едновременно*** *максимално понижение на едната температура и максимално повишение на другата*”). За да отхвърлим подобно усещане, ще приведем и съответните количествени разглеждания, които, разбира се, водят до същите резултати. При това съществено е, че в случая са напълно достатъчни средствата на училищната математика, като пресмятанията предоставят добра възможност за трениране и на търпението, и вниманието. Освен това, примерът предоставя една рядко срещана в училище възможност – да се намери максимум на функция на две променливи.

Тъй като в нашия случай във всички членове на уравнението на топлинния баланс фигурира специфичният топлинен капацитет на водата, за опростяване на писането ще смятаме, че той е вече съкратен[2].

Като използваме въведените означения, общата температура $t'$ след края на първата операция се определя от уравнението на топлинния баланс, което в случая има вида:

$$m_2(t_2 - t') = m(t' - t_1). \tag{3}$$

Уравнението на топлинния баланс, от което се определя общата температура $t''$ след втората операция се изразява с равенството:

$$m_2(t' - t'') = (m_1 - m)(t'' - t_1). \tag{4}$$

По аналогичен начин общата температура $t'''$, установила се след третата операция, се определя от равенството:

$$m(t' - t''') = (m_1 - m)(t''' - t''). \tag{5}$$

От системата уравнения (3) – (5) определяме междинните температури и за интересуващата ни разлика между окончателните температури на водата в първия и втория съд получаваме израза:

$$\Delta t = t''' - t'' = \frac{m_2}{m_1} \frac{m(m_1 - m)}{(m_2 + m)(m_1 + m_2 - m)} (t_2 - t_1). \tag{6}$$

Четири следствия от тази формула позволяват с елементарни средства да решим втория и третия проблем от условието на задачата:

— Независимо от масите на водата в двата съда и независимо от количеството студена вода, прехвърлено в третия съд, постигнатата температурна разлика е винаги положителна, т.е. след трите операции температурата в първия съд (съдът с отначало студената вода) се оказва винаги по-висока от температурата на водата във втория съд (в който е била горещата вода). В този смисъл направеното в началото ограничение при първата операция да отлеем в третия съд **малко** вода се оказва

[2]Задачата може да се усложни, като се разглежда случай, при който в двата съда има различни по вид течности. В този случай всички формули запазват вида си, като под $m_1$, $m_2$ и $m$ трябва да се разбират не самите маси, а съответните топлинни капацитети на телата (т.е. масата, умножена по *специфичния* топлинен капацитет на дадена течност).

излишно. То бе използвано само за придаване на по-голяма нагледност на резултата.

— Постигнатата температурна разлика е право пропорционална на началната разлика в температурите на водата в двата съда (факт, който може да се смята за естествен от физична гледна точка).

— Ако при първата операция прелеем в третия съд всичката вода от първия съд (т.е. при $m = m_1$), или пък не отлеем никаква вода (т.е. при $m = 0$), то след трите операции $\Delta t = 0$, което също е очаквано от физична гледна точка.

— Ако в (6) заменим $m$ с $m_1 - m$, изразът не се променя, т.е. крайният резултат не зависи от това, дали при първата операция осъществяваме контакт между третия и втория, или между първия и втория съд.

От първото и третото от изброените следствия заключаваме, че като функция от $m$, някъде в интервала $0 < m < m_1$ температурната разлика $\Delta t$ **трябва** да има максимум.

Следващият въпрос, на който търсим отговор е при какво количество прехвърлена вода (при каква стойност на $m$) се получава максимумът на $\Delta t$ и каква е неговата величина.

Тъй като се ограничаваме със средствата на елементарната математика, ще се възползваме от четвъртото следствие, според което графиката на $\Delta t$ като функция на $m$ е симетрична спрямо краищата на интервала $0 < m_1$. Това означава, че щом функцията има максимум, той е в средата на този интервал, т.е. при:

$$m = \frac{m_1}{2}\,. \tag{7}$$

С други думи, за да получим максимална температурна разлика в края на третата операция, в третия съд трябва да отлеем половината от студената вода.

След заместване на този израз в (4) и след съответната преработка, за максималната стойност на температурната разлика получаваме:

$$\Delta t_{\max} = \frac{m_1 m_2}{(2m_2 + m_1)^2}(t_2 - t_1). \tag{8}$$

За тези, на които разсъжденията, довели до резултатите (7) и (8), ще се сторят или неясни, или недостатъчно убедителни, предлагаме да добавят и извадят от дясната страна на (4) израза

$$\frac{m_1 m_2}{(2m_2 + m_1)^2}(t_2 - t_1)$$

и да я преобразуват във вида[3]:

$$\frac{\Delta t}{(t_2 - t_1)} = \frac{m_2}{m_1} \frac{m(m_1 - m)}{(m_2 + m)(m_1 + m_2 - m)} \pm \frac{m_1 m_2}{(2m_2 + m_1)^2}$$
$$= \frac{m_1 m_2}{(2m_2 + m_1)^2} - \frac{(2m - m_1)^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{m_1 (m_2 + m)(m_1 + m_2 - m)(2m_2 + m_1)^2}$$

Тъй като знакът минус между двете събираеми в дясната страна на последното равенство стои пред неотрицателен израз, търсената максимална стойност на температурната разлика се достига, когато числителят на този израз е нула, т.е. – когато е изпълнено условието (7). При това, разбира се, формулата, която описва разликата, се дава точно с формула (8).

За онези пък, които си задават въпроса дали $\Delta t$ няма и други екстремуми в интервала $0 < m < m_1$, можем само да препоръчаме да изоставят алгебрата и да използват висшата математика: да диференцират (6) по $m$, да търсят нулите на производната и т.н.

Последният въпрос, на който дължим отговор, е: при какво съотношение между масите $m_1$ и $m_2$ на водата в двата съда намерената максимална температурна разлика (8) е максимална. За целта ще приложим вече използвания способ: след като разделим за удобство (8) с $t_2 - t_1$, към дясната страна прибавяме и вадим $\frac{1}{8}$, за да преобразуваме формулата във вида:

$$\frac{\Delta t_{\max}}{t_2 - t_1} = frac m_1 m_2 (2m_2 + m_1)^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \left[\frac{2m_2 - m_1}{2m_2 + m_1}\right]^2.$$

Очевидно този израз има максимална стойност при:

$$m_1 = 2m_2, \tag{9}$$

т.е., когато е изпълнено вече познатото ни условие (1). Самият максимум се дава със също познатия израз (2):

$$[\Delta t_{\max}]_{\max} = \frac{1}{8}(t_2 - t_1). \tag{10}$$

[3]Преди 6–7 десетилетия на студентите по физика и математика в Софийския университет лекции по диференциално и интегрално смятане четеше колоритният проф. Ярослав Тагамлицки. На черната дъска в доказателствата на редица твърдения той често използваше същия прийом: прибавяне и изваждане на един и същ израз, който понякога имаше доста сложен вид. И винаги на въпроса на студентите "Ама как се досетихте какво да прибавяте и да извадите?" професорът с усмивка отговаряше "Драги студенти, аз съм умен човек и затова се досещам!". Разбира се, нашият случай не е такъв – всеки ще забележи, че просто сме прибавили и извадили точно израза, описващ търсения максимум (който предварително сме пресметнали по стандартния начин с търсене нулите на първата производна).

### Още един *добър* въпрос

В условието на задачата се описва една, общо взето **симетрична** ситуация: дадени са два съда с вода, търсим при каква връзка между масите на горещата и на студената водата може да се получи максимална разлика в температурите им, но с обратен знак (т.е. – температурата на студената вода да стане по-висока от тази на горещата). Тази симетрия в условието предполага, че няма значение кой съд ще наречем първи и кой – втори, отговорът не би трябвало да се променя, ако в него разменим местата на индексите "1" и "2". Решавайки задачата, ние, съвсем произволно, нарекохме първи съда със студената вода.

Противно на тези очаквания обаче, в единия от отговорите – условието $m_1 = 2m_2$, подобна симетрия липсва. Възниква въпросът: къде нарушихме симетрията? Както ще видим, важният въпрос за изгубената симетрия е свързан с друг, който обикновено не се обсъжда при решаване на физични задачи в училище: въпросът за единственост на решението.

Отговор на въпроса за изгубената симетрия намираме лесно, като проследим трите операции, с чиято помощ решихме първия проблем. Там ние **произволно избрахме** да отлеем в третия съд **студена** вода. Всички разсъждения обаче може да повторим и ако започнем с отливане на гореща вода. И в този случай, повтаряйки всички разсъждения, бихме получили същата максимална разлика (10) между крайните температури, но ако масите на водата в двата съда удовлетворяват връзката:

$$m_2 = 2m_1, \tag{11}$$

т.е. съотношение, обратно на (9).

Сравняването на (9) и (11) поставя въпроса кое от тях е вярното? Неговият отговор може да изглежда изненадващо: верни са и двете равенства. Само че те описват различни случаи. И в двата достигнатата максимална температурна разлика се описва с една и съща формула:

$$\Delta t = \frac{|t_2 - t_1|}{8}, \tag{12}$$

която притежава обсъжданата симетрия, но разликата е в стойностите на двете крайни температури: когато студената вода е два пъти повече от горещата, $t''$ и $t'''$ са по ниски от съответните им стойности в другия случай, когато в началото горещата вода е два пъти повече от студената.

С други думи, задачата има две решения, в зависимост от това дали студената вода е два пъти повече от горещата или обратно. И в двата случая достижимата максимална температурна разлика

$$\Delta t = t''' - t'' = \frac{|t_2 - t_1|}{8}$$

е една и съща, но в първия случай двойката ($t''$, $t'''$) е позиционирана по-близо до началната температура на студената вода, а във втория случай – по-близо до началната температура на горещата вода. От физична гледна точка това твърдение звучи приемливо и може да се провери чрез съответните пресмятания.

Друг възможен допълнителен въпрос за обсъждане засяга реда, по който търсим максимумите на $\Delta t$. Може директно да се провери какви ще бъдат резултатите, ако при количественото разглеждане първо търсим максимума по отношение на $m_2/m_1$, а след това – и по отношение на $m$. Във висшата математика се доказва теорема, която гарантира независимост на резултата от реда, по който се търси максимум на функция на две променливи. Ако искаме да избегнем пресмятанията и да се позовем на тази теорема, трябва да проверим дали функцията (6) удовлетворява условията за нейната валидност.

Направеното разглеждане показва колко многобройни са **добрите** въпроси (в смисъла на казаното в началото), които може да се извлекат от една и наглед, и фактически проста физична ситуация.

### Библиография


[1] http://phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/Ichast/2zadachi-eseta/55manista.pdf

[2] http://phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/Ichast/2zadachi-eseta/12klasika1.pdf

[3] http://phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/Ichast/4prostozadachi/zadacha15.pdf

[4] П.В. Маковецкий (1979) “*Смотри в корен!*”, Москва, Наука.

[5] http://phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/Ichast/2zadachi-eseta/44toploobmen.pdf.


## Quantitative Results through Qualitative Considerations


**Christo Popov**

University of Sofia, Faculty of Physics, 1164 Sofia, 5 James Bourchier Blvd.



**Abstract:** We discuss the solutions of a known problem: how to warm up cold water on behalf of the heat from the hot water so that its temperature be higher than that of the above. It is shown how to obtain quantitative results through qualitative considerations.