

Две различни задачи с един и същ отговор – Φ

Христо Попов

СУ “Св. Климент Охридски”, Физически факултет,
София 1164, бул. Джеймс Баучър 5

Абстракт. Дадени са елементарни сведения за числото Φ , свързано с т.нар. *златно сечение*. Разгледани са две задачи: едната от областта на електротехниката, другата – свързана с гравитационните сили, които илюстрират свойството на Φ да се появява в най-разнообразни физични ситуации.

Предварителни бележки

На пръв поглед множеството на ирационалните числа, т.е. тези, които не могат да се представят като отношение на две цели числа, е устроено в съответствие с демократичните принципи: в определен смисъл всички негови членове са равноправни. Както обикновено обаче, и тук сред равните има някои по-равни, за които са запазени специални буквени означения. На първо място сред тях стои, разбира се, числото $\pi = 3,1415\dots$, а след него се нарежда числото на Непер, основата на естествените логаритми $e = 2,7182\dots$ Изглежда, че основен претендент за третото място е ирационалното число, означавано с буквата Φ , което е тясно свързано с т.нар. *златно сечение*.

Съществуват няколко еквивалентни определения за Φ . Например:

Алгебрично определение : Φ е положителният корен на квадратното уравнение

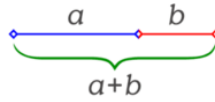
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0, \quad \text{т.е.} \quad \Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,6180\dots \quad (1)$$

Ако разделим (1) с Φ и го запишем във вида

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1,$$

виждаме, че корените на това уравнение имат следното уникално свойство: реципрочната им стойност се получава, като извадим от тях единица, т.е. коренът и реципрочната му стойност имат една и съща дробна част ($\frac{1}{\Phi} = 0,6180\dots$).

Едномерно геометрично определение (дадено от Евклид) : Φ е отношението между по-дългата към по-късата части на отсечка (фиг. 1),



Фиг. 1.

за която отношението между дължините на цялата отсечка и по-дългата ѝ част има същата стойност:

$$\Phi \equiv \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}. \quad (2)$$

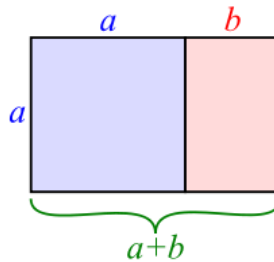
(Ако дясната част представим като сума от две дроби и използваме означението $\Phi \equiv a/b$, получаваме уравнението

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi},$$

което е еквивалентно на (1).

Двумерно геометрично определение : Φ е отношението между дългата към късата страна на правоъгълник, от който, като отстраним квадрат със страна, равна на късата страна, оставащият правоъгълник е подобен на началния (фиг. 2):

$$\Phi \equiv \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$



Фиг. 2.

От последното определение следва, че, ако от по-малкия правоъгълник отстраним квадрат със страна b , ще остане правоъгълник със страни b и $a - b$, дължините на които са в същото съотношение Φ и т.н. – до безкрайност.

Интересните свойства, ролята и значението на числото Φ ¹, причината, поради която се нарича *златно сечение* (*златна пропорция*, *златна среда* и др.п.) са описани подробно в книгата на известния астрофизик Марио Ливьо². Според автора:

*Някои от най-великите математически умове на всички времена, от Питагор и Евклид в древна Гърция, през средновековния италиански математик Леонардо от Пиза и възрожденския астроном Йохан Кеплер, до днешните учени от рода на оксфордския физик Роджър Пенроуз, са изкарвали безкрайни часове над това просто отношение и неговите свойства. Но обаянието на златното сечение не се ограничава само до математиците. Биолози, художници, музиканти, архитекти, психолози и дори мистици са размишлявали и дебатирали основанията за неговата вездесъщност и притегателна сила. В действителност може да се каже, че златното сечение е вдъхновявало мислителите от всички дисциплини повече от всяко друго число в историята на математиката.*¹

Известни са, например, спекулациите относно използването на златното сечение от египтяните при построяването на пирамидите и на някои храмове, от елините – в пропорциите на атинския Партенон и т.н. За нас специално е интересно, че и древните българи имат отношение към Φ ! На с. 47 от т. I на своите *Български хроники* Стефан Цанев твърди, че нав-

¹Това означение също има своята история. Първоначално числото $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ се означава с τ – първата буква на старогръцкото $\tau\acute{o}\mu\eta$ – сръзвам. Едва в началото на 20. век американският математик Марк Бар предлага то да се означава с Φ – първата буква от името на прочутия древногръцки скулптор Фидий (490–430 г. пр. Хр.), който често и точно използвал това число в творенията си.

²**Mario Livio**, *The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number*, Broadway Books, N.Y., 2002.

¹В същата книга авторът сочи, че голяма част от случаите, в които Φ играе роля, се дължи на връзката му с известната редица от числа на Фибоначи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Оказва се че n -тият член на тази редица може да се пресметне по формулата

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\Phi^n - (-\Phi)^{-n}].$$

Освен това той отбелязва, че в известен смисъл Φ е *най-ирационалното* измежду ирационалните числа, тъй като безкрайната верижна дроб, чрез която може да се представи, е най-бавно сходяща:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

(знаменателите съдържат само единици!).

сякъде по своя хилядолетен път от Азия до Европа те изграждали своите градове “по една и съща сакрална схема: укрепленията представляват три концентрични вписани правоъгълника, издължени в пропорциите на златното сечение...”. (За съжаление, Ст. Цанев не споменава източника, от който е почерпил това сведение.)

Не са ясни съображенията, поради които от редицата “Биолози, художници, музиканти, архитекти, ...” и т.н. авторът на приведения по-преди цитат изключва физиците. Книгата му обаче изобилства с примери, показващи, че Φ играе роля както във физиката (напр. теорията на квазикристалите, на фракталните структури и хаоса), така и в астрофизиката (формата на ръкавите на спиралните галактики).

По-долу ще посочим една област, в която Φ дори изпреварва стоящите преди него в редицата на известните числа π и e – това е областта на физичните задачи. Трудно е, например, да си представим физична задача, чиито отговор е π или e , ако тези числа не са предварително заложили в условието на задачата. Оказва се обаче, че има задачи, при това отнасящи се до стоящи твърде далеч една от друга области на физиката, чиито отговор е Φ . Тук ще посочим две подобни задачи, които илюстрират свойството на това число да се появява в случаи, в които това най-малко може да се очаква.

Първа задача

Задачата е свързана с конструирането на домакински електронагревателни уреди. Известно е, че те обикновено се управляват с ключ, който освен нулево (неутрално) положение има още четири степени: ‘1’, ‘2’, ‘3’ и ‘4’, съответстващи на нарастваща мощност на топлоотделянето.

Поставете се на мястото на конструктор, който трябва да направи котлон, чиито четири степени имат отнапред зададени мощности $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$. Най-лесното решение на задачата е в плочата на котлона да се вградят четири резистора с подходящи съпротивления така, че, когато им се подава стандартното напрежение $U = 220$ V, в тях да се отделя топлина с всяка от четирите желани мощности.

Най-простото решение обаче не е най-икономично от гледна точка на разхода на съпротивителен проводник: четири различни мощности могат да се постигнат и с по-малък брой резистори – например с два, стига с помощта на подходящ ключ мрежовото напрежение да се подава на различни техни комбинации. Така например, ако означим съпротивленията на резисторите с R' и R'' ($R' < R''$), минимална мощност ще се отдели при последователното им свързване, тъй като тогава екви-

лентното съпротивление е най-голямо ($R' + R''$), а мощността е обратно пропорционална на съпротивлението ($P = U^2/R$). За втората степен на котлона напрежението трябва да се подаде само на по-голямото от двете съпротивление, за третата – на по-малкото, а за четвъртата степен, когато в плочата трябва да се отдели най-голямата мощност, резисторите трябва да се свържат успоредно (тогава еквивалентното съпротивление $R'R''/(R' + R'')$ е минимално).

Това решение наистина е най-икономично по отношение броя на резисторите, но то не винаги съществува. Така например, не е възможно да се подберат резистори така, че четирите мощности да образуват аритметична прогресия¹ (примерно 500 W, 750 W, 1000 W и 1250 W). Нещо повече – тъй като частното между максималното ($R' + R''$) и минималното $R'R''/(R' + R'')$ съпротивление е не по-малко² от 4, то задачата за подбиране на R' и R'' няма решение, ако не е изпълнено неравенството $4P_1 < P_4$.

Интересно е обаче, че двата резистора може да се подберат така, че четирите мощности P_1 , P_2 , P_3 и P_4 да образуват не аритметична, а геометрична прогресия.

Наистина, нека първо, при посочените по-горе четири начина на подаване на напрежението, да изразим мощностите чрез съпротивленията:

$$P_1 = \frac{U^2}{R' + R''}, \quad P_2 = \frac{U^2}{R''}, \quad P_3 = \frac{U^2}{R'}, \quad P_4 = \frac{R' + R''}{R'R''}U^2.$$

С помощта на тези изрази можем да образуваме отношенията:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{R'}{R''}, \quad \frac{P_3}{P_2} = \frac{R''}{R'}, \quad \frac{P_4}{P_3} = 1 + \frac{R'}{R''}. \quad (3)$$

Тъй като десните страни на първото и на третото от тези равенства съвпадат, трите равенства ще бъдат изпълнени едновременно, стига R' и R'' да удовлетворяват равенството:

$$1 + \frac{R'}{R''} = \frac{R''}{R'}.$$

Въвеждайки означението $x = R''/R'$, за x получаваме уравнението:

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad (4)$$

¹Вж. напр. **Попов Хр.**, Задача, Физика, 4, 2007, стр. 209, а също така <http://phys.uni-sofia.bg/~сроров/Almanah-pdf/I%20chast/2%20zadachi-eseta/34%20koton.pdf>

²Наистина $\frac{(R' + R'')^2}{R'R''} = 4 + \frac{(R' - R'')^2}{R'R''} > 4$.

което представлява точно дефиниционното за Φ уравнение (1).

И така, отговорът на въпроса: *Възможно ли два резистора да се подберат така, че възможните четири мощности на топлоотделяне в тях да образуват геометрична прогресия?*, е:

Да, ако отношението между съпротивленията на резисторите е Φ .

От (2) се вижда също, че и показателят на въпросната прогресия е Φ :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} = \Phi. \quad (5)$$

Забележете още, че от (5) следва и връзката $P_4 = \Phi^3 P_1 = (1,6180\dots)^3 \approx 4,236 P_1$, т.е., както следва и да се очаква, необходимото за съществуване на решение неравенство $4P_1 < P_4$, е изпълнено¹.

Втора задача

Известно е, че силата на тежестта, с която Земята привлича едно тяло, е максимална, когато тялото лежи на земната повърхност. Ако тялото се отдалечава от Земята, тежестта му P намалява обратно пропорционално на квадрата на разстоянието r до центъра на Земята, т.е. $P \sim 1/r^2$, като при безкрайно голямо разстояние става нула. Силата на тежестта обаче намалява и когато тялото, тръгвайки от земната повърхност, приближава центъра на Земята – в самия център тази сила е отново нула.

От тези факти и от съображения за непрекъснатост следва, че на всяка точка от извънземното пространство може да се съпостави точка от вътрешността на Земята, така че силата на тежестта в тези две точки има една и съща големина. Не е трудно да се намери връзка между разстоянията на тези точки до центъра на Земята и земния радиус R . Тук ще разгледаме обаче по-конкретен въпрос: дали измежду безброй многото подобни двойки точки съществува такава (или такива), които отстоят на едно и също разстояние от земната повърхност? (Разбира се, едната извън, другата – вътре в нея.)

За да отговорим на въпроса трябва да припомним как тежестта на едно тяло зависи от разстоянието r до центъра на Земята за случая $r < R$, където R е земният радиус. Разбира се, ще смятаме, че Земята е хомогенна, т.е. – плътността ѝ ρ навсякъде е еднаква. Това опростяващо предположение позволява да използваме едно свойство, присъщо на всички

¹ В търговската мрежа се продава например резервна нагревателна плоча за котлон, в която са монтирани резистори със съпротивления $R' = 95 \Omega$ и $R'' = 155 \Omega$. Лесно се проверява, че тяхното отношение е много близко до Φ . Затова и пресметнатите мощности образуват геометрична прогресия. (В паспорта на уреда стойностите им са закръглени на 200 W, 300 W, 500 W и 800 W.)

сили, които намаляват като $1/r^2$ с отдалечаване от своя източник. Формулирано за силата на тежестта то гласи²:

Когато източникът на гравитационната сила притежава сферична симетрия, тежестта на тяло, разположено на разстояние r от центъра на симетрия не зависи от масите, намиращи извън сферата с радиус r и е същата, каквато би била, ако останалите маси се поставят в този център.

Именно поради това свойство, ако означим масата на Земята с M , силата, с която тя привлича тяло с маса m , намиращо се **извън** нея на разстояние r от центъра ѝ, се описва с формулата:

$$P = G \frac{mM}{r^2} \quad \text{при } r > R, \quad (6)$$

въпреки че близо до земната повърхност Земята не може да се разглежда като точкова маса (тук G е гравитационната константа).

Същото свойство дава възможност да намерим зависимостта на P от r и за случая, когато тялото е във **вътрешността** на Земята, т.е. при $r < R$. И в този случай формулата за силата на тежестта е:

$$P = G \frac{mM(r)}{r^2} \quad r < R, \quad (7)$$

но в нея вече $M(r)$ е масата не на цялата Земя, а само на частта ѝ, затворена в сфера с радиус r . С помощта на формулата за обем на кълбо с радиус r за $M(r)$ получаваме:

$$M(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Като заместим този израз в (7), за зависимостта на тежестта от разстоянието до центъра на Земята получаваме:

$$P = G \frac{m}{r^2} \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

или, като изразим от равенството $M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ плътността ρ чрез общата маса и радиуса на Земята, окончателно:

$$P = G \frac{mM}{R^3} r \quad \text{при } r < R. \quad (8)$$

²В учебниците по физика обикновено доказателство на въпросното свойство се привежда в раздел *Електростатика*. Вж. напр. **М. Борисов** и др., Физика, учебник за 10. клас, С., Народна просвета, 1972, както и **Хр. Попов, Т. Сугарев, Др. Иванов**, Физика за 11. клас, С., Просвета, 1992.

Чрез формули (6) и (8) ще намерим отговор на въпроса, съществуват ли точки над и под земната повърхност, равно отстоящи от нея, в които тежестта на телата е една и съща. Наистина, да означим с h разстоянието от тези точки до земната повърхност. Ако те наистина съществуват, според споменатите формули ще бъде изпълнено равенството:

$$G \frac{mM}{(R+h)^2} = G \frac{mM}{R^3} (R-h).$$

Това равенство представлява уравнение за h , което лесно се привежда във вида (1):

$$\left(\frac{R}{h}\right)^2 - \frac{R}{h} - 1 = 0. \quad (9)$$

От сравнението с (1) следва, че $R/h = \Phi$ и отговорът на интересувания ни въпрос се оказва положителен: тежестта на всяко тяло, намиращо се над земната повърхност на височина $h = R/\Phi \approx 0,619R$ е такава, каквата е под земната повърхност на същата дълбочина h .

И така, ако решаваме задача: *Съществуват ли точки, равноотдалечени от земната повърхност, но едната вътре, а другата вън от нея, в които тежестта на телата е еднаква?*, отговорът е:

Да, като отношението между радиуса на Земята и разстоянието от повърхността ѝ до коя да е от тези точки е Φ .

Това са само два от многобройните примери, които илюстрират забележителното свойство на числото Φ да се появява в най-разнообразни, нямащи никаква връзка помежду си физични ситуации. Или, както казва Марио Ливио в споменатата в началото книга: *“Чарът на златното сечение произтича на първо място и най-вече от факта, че то притежава почти мистериозното качество да изниква там, където се очаква най-малко.”*

Two different problems with the same answer – Φ

Christo Popov

St Kliment Ohridski University of Sofia, 5 James Bourchier Blvd., 1164 Sofia

Abstract: A basic information about the number Φ associated with the Golden Ratio is given. Two problems: one in the field of electrical engineering; and another one related to gravitational forces are discussed. They illustrate the ability of Φ to appear in completely different physical situations.