Физика: Методология на обучението **1/2** (2016) 3–13

Векторът на Лаплас–Рунге–Ленц. Част I: Задача на Кеплер*

Иля В. Петров
Софийски Университет Св. Климент Охридски,
Физически факултет, София 1164, бул. Джеймс Баучър 5

Абстракт. Работата цели да припомни един малко позабравен в образованието по механика вектор, известен като вектор на Лаплас–Рунге–Ленц, да представи различни подходи, позволяващи достъпно (дори за ученици) обяснение на законите на Кеплер, както и да подчертае значението на автентичната дефиниция на Нютон за сила.

МАЛКО ИСТОРИЯ

Античната астрономия ни е предложила две идеи за устройството на света: гео- и хелиоцентрична. Първата поставя Земята в центъра на Вселената, а втората, изказана от Аристарх около 250 г. пр. Хр. – Слънцето. За жителите на Земята геоцентричната перспектива е "естествената" и, когато е подкрепена от авторитет като Аристотел и снабдена с математическото описание на Птоломей, тя става господстваща в продължение на хилядолетия. Хелиоцентричната представа е възкресена с Коперниковата *Revolutionibus Orbium Coelestium*, отпечатана през 1543 г. Триумфът ѝ идва с трите закона на Кеплер:

1. Траекториите на планетите са елипси, а Слънцето е в един от фокусите (*Очевидно пътят на планетата не е по кръг, а постепенно се закривява като достига ширината на орбитата в перихелия: такъв път се нарича овална фигура..., Astronomia Nova, 1609*);
2. Движението е в равнина с постоянна площна скорост (*Доколкото орбитата се състои от безкрайно много точки и съответно безкраен брой разстояния (от Слънцето), приех, че сумата от тези разстояния съставя площта на орбитата. Спомняйки си, че по същия начин в миналото Архимед показа, че периметърът на окръжността е пропорционален на диаметъра ѝ, разделих (площта) на безкраен брой триъгълници..., Astronomia Nova, 1609*);
3. Връзката между периода и голямата полуос, $T^2/a^3 = \text{const}$ (*Абсолютно сигурно и точно е, че отношението на периодите на кои*

*Тази работа е разширена версия на доклад, представен на XLIV Конференция по въпросите на обучението по физика, 7–10 април 2016, Ямбол

ISSN 1314–8478 © 2016 Heron Press Ltd.

Фиг. 1. Йоханес Кеплер. Обърнете внимание, че зависмостта $f \sim 1/r^2$ се среща за първи път в неговата *Astronomia Pars Optica* (1604).

> *да е две планети към средните им разстояния е точно равно на сескиалтерното им отношение* [т.е. взети на степен 3/2]..., *Harmonice Mundi, 1619*).

За науката обяснението на тези закони е, може би, не по-малко важно от делото на Галилей. Наистина, законът за всемирното привличане и смятането с безкрайно малки, т.е математическият анализ, са продукти на тази задача. Но, ако за експериментите на Галилей знае всеки гимназист, нещата не стоят така със законите на Кеплер. Един от аргументите е, че обяснението им изисква сериозна математическа подготовка, далеч надхвърляща рамките на гимназиалния курс. Освен това според някои български "специалисти" връзката им с законите на Нютон е "несъществена", а и "не" предлага евристични задачи за курса по физика.

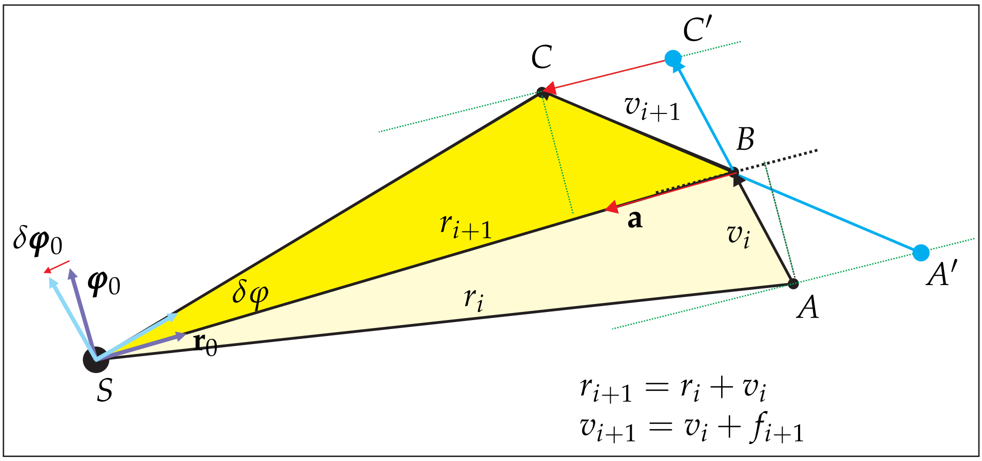
Ще се опитам да развенчая тези митове.

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕ НА ЦЕНТРАЛНА СИЛА

Нека имаме две материални точки, взаимодействащи си със сила, зависеща само от разстоянието между тях и насочена по правата, която ги свързва. Нека масата на едната да е много по-голяма от масата на другата така, че с достатъчно добро приближение да приемем, че тежката материална точка е неподвижна. Тогава задачата за движението на системата се свежда до движение на материална точка под действие на централна сила[1]. Непрекъснатото действие на силата може да заменим с моментни силови импулси, действащи на равни интервали време, като движението между тях е инерциално, т.е. с постоянна скорост[2].

[1]Наименованието "централна" идва от това, че обикновено избираме началото на координатната система да съвпада с тежката материална точка.

[2]Тази дискретизация е предложена от Нютон през ноември 1864 г. в манаскрипта *De Motu corporum in gyrum* (За движението на тела по орбита).



Фиг. 2. Движение с дискретно време. В момента t_{i+1} частицата се е преместила с $\vec{v}_i$ спрямо положението ѝ в момента t_i, а скоростта ѝ се изменя под действие на силата $\vec{f}_{i+1}$. Подобни схеми лежат в основата на почти всички съвременни числени методи за решаване на задачите за движение.

Следващите разглеждания се основават на работата на J.-P. Provost и C. Bracco [1]. Нека т. A, B, C, … са положенията в моментите t_0, $t_1 = t_0 + \Delta t$, $t_2 = t_1 + \Delta t$, … и $\Delta t = 1$ (вж. Фиг. 2). Тогава "учебникарската" дефиниция: *ускорение е изменението на скоростта за единица време* води до

$$\vec{a} = \Delta \vec{v}. \tag{1}$$

Геометрично това означава, че, ако векторът $AB = \vec{v}$ е скоростта между т. A и т. B, скоростта между т. B и т. C е $BC' + \vec{a}$ (Нютон е написал: *Но когато тялото пристига в т. B, централната сила му действа еднократно, но достатъчно силно така, че тялото се отклонява от линията BC' и продължава по линията BC*). Предположението, че силата е централна, означава:

(i) **движението е в равнина**, тъй като $CC' \parallel SB$, а BC' е продължение на AB, т.е. т. C също принадлежи на равнината на фигурата;

(ii) **площта**$_{\triangle SAB}$ = **площта**$_{\triangle SBC}$, тъй като имат обща основа и равни височини (равенството на височините следва от успоредността на AA', SB, CC' и факта, че $AB = BC' = \vec{v}_i$).

За да получим алгебричен израз за получения геометрично резултат (ii), нека с $\Delta\varphi$ означим ъгъла на завъртане на SB до SC под действие на силата f_{i+1}. Ако стъпката Δt е малка, $r_{i+1} \approx r_i \equiv r$ и

$$\text{площта}_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} r^2 \sin \Delta\varphi \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi = \text{const}. \tag{2}$$

С други думи, траекторията на цялото движение е в една равнина и за всяка единица време частицата "омита" една и съща площ, т.е.

ВТОРИЯТ ЗАКОН НА КЕПЛЕР
Е РЕЗУЛТАТ ЕДИНСТВЕНО И САМО НА
ЦЕНТРАЛНИТЕ СИЛИ

ЗАЩО $1/r^2$

Съществуват много аргументи за това, че гравитационната сила трябва да е $\sim 1/r^2$. Вече стана ясно, че вторият закон на Кеплер изисква силата да е централна, т.е да е функция на разстоянието r. Следващата важна забележка, която Нютон прави в Книга III на *Principia* е ролята на центробежната сила[3] като реакция на центростремителната (гравитационната) сила. Тогава от закона за центробежната сила ($f \sim v^2/r$), връзката между периода и радиуса на траекторията ($Tv \sim r$) и третия закон на Кеплер ($T^2 \sim r^3$) следва хипотезата:

$$f_{\text{gravitation}} \sim 1/r^2. \tag{3}$$

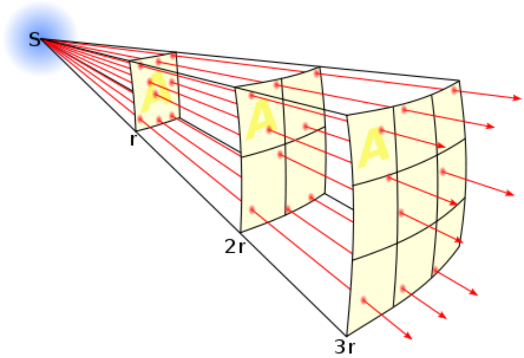
Струва си да припомним и разсъжденията на Кант, които се основават на предствата за силово поле, което отслабва с разстоянието и количествено е пропорционално на плътността на "силовите линии" (вж. Фиг. 3)[4], т.е. $f \sim 1/r^2$. Всъщност анализът на Кант ни казва нещо много по-важно: фактът, че живеем в тримерен свят, води до гравитация от типа $1/r^2$, и обратното, ако гравитационният закон е $f \sim 1/r^2$, светът е тримерен.

ЗА КОНСТАНТИТЕ НА ДВИЖЕНИЕ И СИМЕТРИИТЕ

По-горе показхме, че вторият и третият закон на Кеплер подсказват, че орбиталното движение се определя от: (i) централна сила, която не зависи от времето (3); и (ii) се извършва в една плоскост (2). Първата особеност означава, че движението е симетрично (инвариантно) спрямо времето, т.е. съществува величина, която остава постоянна – това е добре познатата ни механична енергия. Тъй като една равнина се дефинира с нормалата към нея, съществуват още три (пространството е тримерно)

[3]Кристиан Хюйгенс е първият, който публикува общоприетата оценка за ускорението ($\sim v^2/r$), с което се разбягва въртящо се тяло. На него дължим и термина центробежна сила (*vis centrifuga*), изказан за първи път в *Horologium oscillatorium* от 1673 г.

[4]Силовите линии на електромагнитното поле в работите на Фарадей са "естествено-то" продължение на анализа на Кант. Любопитно е, че Фарадей не се позовава на Кант, а цитира многократно неговия последовател и тълковател Р. Божкович.



Фиг. 3. Силово поле. Интензитетът е пропорционален на $1/S$, т.е. на $1/4\pi r^2$ в тримерно пространство.

запазващи се величини – от курса по механика знаем, че това са компонентите на ъгловия момент (момент на импулса), а движението е симетрично по отношение на въртене спрямо нормалата. В обичайните означения изразът (2) става

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = \text{const} = L/2m\,, \tag{4}$$

където L е големината на момента на импулса, а m – масата на частицата.

Хипотезата за вида на центростремителната сила води до ускорение

$$\vec{a} = -\frac{k}{mr^2}\vec{r}_0\,, \tag{5}$$

където $\vec{r}_0$ е единичният вектор, ориентиран от центъра към частицата, а k е константа. От израза за изменението на скоростта (1) и закона (4) последното уравнение приема вида

$$\Delta\vec{v} = -\frac{k}{L}\Delta\varphi\vec{r}_0\,. \tag{6}$$

Забележителното в това уравнение е, че дясната страна е също изменение на някакъв вектор. Наистина, ако въведем, както е показано на Фиг. 2, ортонормиран базис $(\vec{r}_0, \vec{\varphi}_0)$, завъртането на ъгъл $\Delta\varphi$ трансформира базиса в $(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}_0 = \vec{r}_0 + \Delta\varphi\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_0 + \Delta\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}_0 - \Delta\varphi\vec{r}_0)$, т.е. векторът $\Delta\vec{\varphi}_0$ е насочен противоположно на вектора $\vec{r}_0$, а по големина е равен на $\Delta\varphi\vec{r}_0$. Следователно

$$\Delta\vec{v} = \frac{k}{L}\Delta\vec{\varphi}_0 \Longrightarrow \Delta\Big(\vec{v} - \frac{k}{L}\vec{\varphi}_0\Big) = 0 \Longrightarrow \vec{v} - \frac{k}{L}\vec{\varphi}_0 = \text{const}. \tag{7}$$

Така записан векторът $\vec{v} - \frac{k}{L}\vec{\varphi}_0$ е познат като вектор на Херман[5]. За целите на изложението е по-удобно да го предефинираме, умножавайки го векторно с $m\vec{L}$ и отчетем, че векторното произведение на момента на импулса $\vec{L}$ с кой да е вектор $\vec{B}$ от равнината, перпендикулярна на $\vec{L}$, се изразява в завъртане на 90° на вектора $\vec{B}$ и умножаване с големината на $\vec{L}$. Посоката на завъртане се определя от реда на множителите (дясна тройка).

$$(\vec{v} - \frac{k}{L}\vec{\varphi}_0) \times m\vec{L} \Longrightarrow \vec{p} \times \vec{L} - km\frac{\vec{r}}{r} \equiv \vec{A}\,, \tag{8}$$

където $\vec{p} = m\vec{v}$. Векторът $\vec{A}$ се нарича вектор на Лаплас или, както се среща в квантовата механика, вектор на Рунге–Ленц.

На пръв поглед новият постоянен вектор $\vec{A}$ прави задачата на Кеплер свръхопределена, тъй като постоянните величини стават седем:

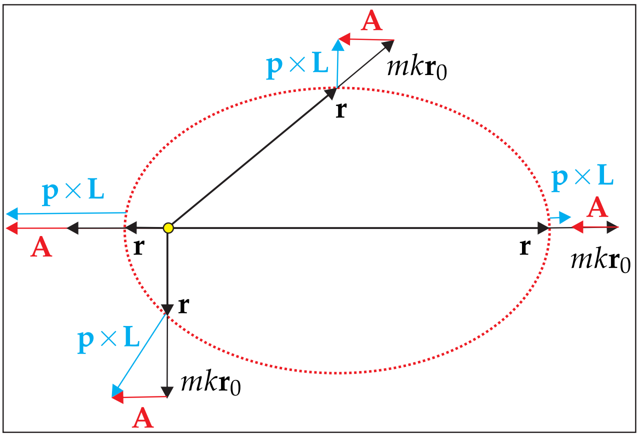
- енергията $E = p^2/2m - k/r$;
- трите компоненти на момента на импулса $\vec{L}$; и
- трите компоненти на вектора на Лаплас $\vec{A}$.

Да припомним, че дадена система е интегруема (притежава точно решение), ако броят на независимите константи на движение е равен на броя на началните условия. В нашия случай необходимите начални условия са шест: три за началното положението на материалната точка и три за скоростта ѝ. Лесно се вижда от дефиницията на вектора $\vec{A}$, че той винаги остава в равнината на движение. Следователно векторите $\vec{A}$ и $\vec{L}$ са взаимно перпендикулярни, т.е. $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$. Това означава, че броят на независимите константи на движението се редуцира до шест – задачата на Кеплер е интегруема. Геометричният смисъл на $\vec{A}$ се вижда от Фиг. 4. Векторът $\vec{A}$ е насочен винаги към перихелия, дефиниран спрямо привличащия силов център, а големината му, изразена чрез констатите на движение е

$$A^2 = 2mEL^2 + m^2k^2\,, \tag{9}$$

където E е енергията, L – големината на момента на импулса, m – масата на частицата и k е константата в израза за гравитационната сила.

[5] През 1710 г. в кратко писмо до Даниел Бернули математикът Якоб Херман предлага нов извод на траекторията на планетите, като въвежда този нов постоянен вектор `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k34901/f707.chemindefer`.



Фиг. 4.

Наистина

$$A^2 = \Big(\vec{p}\times\vec{L} - km\frac{\vec{r}}{r}\Big)\cdot\Big(\vec{p}\times\vec{L} - km\frac{\vec{r}}{r}\Big) = (\vec{p}\times\vec{L})^2 - 2\frac{km}{r}\vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{L}) + k^2m^2$$
$$= p^2L^2 - (\vec{p}\cdot\vec{L})^2 - 2\frac{km}{r}(\vec{r}\times\vec{p})\cdot\vec{L} + k^2m^2 = p^2L^2 - 2\frac{km}{r}L^2 + k^2m^2$$
$$= 2m\Big(E + \frac{k}{r}\Big)L^2 - 2\frac{km}{r}L^2 + k^2m^2 = 2mEL^2 + k^2m^2\,.$$

Обърнете внимание, че при извода на формула (9) използвахме явния вид на гравитационния закон на Нютон.

Векторът $\vec{A}$ е характеристика на движението също толква значима, колкото са енергията E и моментът на импулса $\vec{L}$. От друга страна, съгласно теоремата на Ньотер на всяка константа на движението съответства някаква симетрия, по отношение на която системата е инвариантна. Коя е "скритата" симетрия, породена от вектора на Лаплас? Отговорът е: Задачата на Кеплер е симетрична по отношение на въртене в четиримерно пространство (реално тримерно пространство + собствено "време"). Този въпрос ще е предмет на друга част от това изследване.

ГЕОМЕТРИЧЕН ИЗВОД НА ПЪРВИЯ ЗАКОН НА КЕПЛЕР

Първият закон на Кеплер (орбитите на планетите са елипси, в един от чиито фокуси е Слънцето) е валиден само ако приемем, че силата, действаща на планетите, е привличаща и има вид $f \sim 1/r^2$. Тази теза Нютон обосновава в Proposition 11 от *Principia*, а в Corollary 1 на Proposition 13 – обратното твърдение, че под действие на подобна сила траекториите на планетите са елипси.

По-късно, през 1710 г. Якоб Херман предлага доказателство, което води до познатото ни от курсовете по теоретична механика Нютоново уравнение за движение от втори ред, записано в полярни координати. Разбира се, решаването на това уравнение изисква наистина добра математическа подготовка.

Друг широко разпространен подход е да се използва определението за траектория на движеща се частица като проекция на радиус-векторът ѝ върху постоянен вектор. Тогава уравнението

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = rA\cos\theta\,, \tag{10}$$

където $\vec{A}$ е векторът на Лаплас, дава директно уравнение на елипса в полярни координати [2].

Тук предлагаме, следвайки [3], чисто геометрично доказателство. Доколкото изводът използва знания, включени в специализиращата програма за средния курс по математика, той може да се преподава както в началните университетски курсове по Обща физика, така и в гимназиите.

Задачата, която си поставяме, е да докажем, че траекторията на частица с маса m, движеща се под действие на сила $f = -k/r^2$, $k > 0$, е елипса.

Доказателството ще проведем в две стъпки: първо, ше покажем, че $\overrightarrow{OT}$ остава постоянен при движението на частицата за дадена траектория; и, второ, че сумата от разстоянията от т. O и т. T до коя да е точка от кривата $\mathcal{E}$ е константа, т.е. траекторията е елипса (вж. Фиг. 5).

За енергията на системата имаме

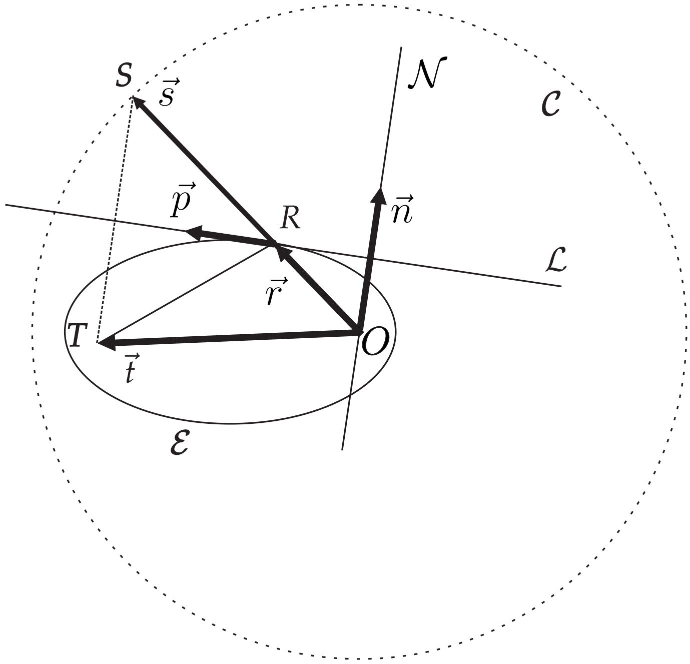
$$E = p^2/2m - k/r\,. \tag{11}$$

Ако $E < 0$, движението е финитно. Частицата се движи в равнина, перпендикулярна на $\vec{L}$, като остава в областта, ограничена от окръжността $\mathcal{C}$ с радиус $r_{\max} = -k/E$ ($p = 0 \to E = -k/r_{\max}$).

Стъпка 1 : По построение (вж. Фиг. 5) т. S е образът на т. R върху окръжността $\mathcal{C}$, т. T е огледалният образ на т. S спрямо правата $\mathcal{L}$, а векторът $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{L}$ лежи на правата $\mathcal{N}$. Тогава за вектора $\overrightarrow{OT} \equiv \vec{t}$ имаме

$$\vec{t} = \vec{s} - \overrightarrow{TS}\,. \tag{12}$$

Тук $\vec{s} \equiv \overrightarrow{OS} = -\dfrac{k}{E}\dfrac{\vec{r}}{r}$, а векторът $\overrightarrow{TS}$ е успореден на $\vec{n}$ (и двата вектора са перпендикулярни на правата $\mathcal{L}$). Големината му е равна на удвоената



Фиг. 5. Частицата се движи по кривата $\mathcal{E}$ и в даден момент се намира в т. R. Точка O е центърът на ограничаващата окръжност $\mathcal{C}$ с радиус $r_{\max} = k/|E|$. Движението на частицата се описва с радиус-вектор $\vec{r}$ и импулс $\vec{p}$. Правата $\mathcal{L}$ е допирателна към $\mathcal{E}$ в т. r и е следователно успоредна на $\vec{p}$. Векторът $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{L}$, където $\vec{L}$ е моментът на импулса. Векторът $\vec{L}$ е перпендиндикулярен на равнината на чертежа и е насочен към читателя. Правата $\mathcal{N}$ е по вектора $\vec{n}$ и е следователно перпендикулярна на $\mathcal{L}$.

проекция на вектора $\overrightarrow{RS} = \vec{s} - \vec{r}$ върху правата $\mathcal{N}$ (триъгълникът $\triangle_{TRS}$ е равнобедрен). С други думи,

$$\overrightarrow{TS} = 2\left[(\vec{s} - \vec{r}) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right] \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\,. \tag{13}$$

Използвайки дефиниционните равенства за $\vec{s}$ и $\vec{n}$, пресмятаме

$$\begin{aligned}(\vec{s} - \vec{r}) \cdot \vec{n} =& \Big(-\frac{k\vec{r}}{Er} - \vec{r}\Big) \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) = -\frac{1}{E}\Big(E + \frac{k}{r}\Big)\vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) \\ =& -\frac{1}{E}\Big(E + \frac{k}{r}\Big)\vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = -\Big(E + \frac{k}{r}\Big)\frac{L^2}{E}\end{aligned} \tag{14}$$

$$n^2 = (\vec{p} \times \vec{L})^2 = p^2L^2 - (\vec{p} \cdot \vec{L})^2 = p^2L^2 = 2m\Big(E + \frac{k}{r}\Big)L^2 \tag{15}$$

Заместваме в (12) и получаваме

$$\vec{t} = (\vec{p} \times \vec{L} - km\vec{r}/r)\frac{1}{mE} \equiv \frac{\vec{A}}{mE} = \overrightarrow{const}\,, \tag{16}$$

т.е., докато частицата се движи по траекторията $\mathcal{E}$, нейната проекция обикаля по окръжността $\mathcal{C}$, но точка T остава неподвижнаа (имаме две фиксирани точки: началото O и т. T). Тъй като моментът на импулса $\vec{L}$ е постоянен, производната по време на първия член в (16) е $\vec{f} \times \vec{L}$ – вектор, перпендикулярен на $\vec{r}$. Производната на единичния вектор $\vec{r}/r$ е вектор, перпендикулярен също на $\vec{r}$. Конкретният вид на гравитационната сила осигурява взаимното компенсиране на тази двойка вектори.

Стъпка 2 : Орбитата $\mathcal{E}$ е елипса с фокуси: точка T и точка O. Доказателството следва директно:

$$|\vec{t} - \vec{r}| + |\vec{r}| = |\vec{s} - \vec{r}| + |\vec{r}| = \left| -\frac{k\vec{r}}{Er} - \vec{r}\right| + |\vec{r}| = -k/E\,, \tag{17}$$

с други думи, сумата на разстоянията от произволна точка, принадлежаща на кривата, до две неподвижни точки (фокусите) е постоянна – това е дефиниция за елипса. В нашия случай елипсата е с главна ос $2a = -k/E$ и разстояние между фокусите $2c = |A|/mE$, където $|A|$ е големината на вектора на Лаплас.

ТРЕТИ ЗАКОН НА КЕПЛЕР

Изводът на третия закон следва стандартната схема. Елипсата се характеризира с главна полуос (a), малка полуос (b) и ексцентрицитет ($e = c/a$), за които е в сила Питагоровата теорема $a^2 = b^2 + c^2$. В термини на константи на движението (вж. уравнения (9) и (17)) параметрите на елипсата изглеждат така:

1. $2a = -k/E\,;$
2. $4c^2 = \dfrac{A^2}{m^2E^2} = \dfrac{2mEL^2 + m^2k^2}{m^2E^2}\,;$
3. $4b^2 = 4a^2 - 4c^2 = -2L^2/mE\,.$

За един период T частицата "омита" цялата площ на елипсата. От друга страна, съгласно (4) площната скорост е постоянна, т.е.

$$\pi ab = TL/2m\,.$$

Повдигаме на квадрат и получаваме окончателно

$$T^2/a^3 = 4\pi^2 m/k = const\,. \tag{18}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптпечатването на Нютоновата *Principia* през 1687 г. е нещо като рожденна дата на съвременната теоретична физика. В този смисъл си струва да се запознаят студентите-бакалвари, както и и учениците с подчертан интерес към физика, с извода на законите на Кеплер, основаващ се на Нютоновата дефиниция за сила и относително лесни геометрични пресмятания. Не по-малко важна е и дискусията за ролята на запазващите се величини. Тук искам да припомня, че именно принципът на Декарт за всемирното запазване на количеството движение (закон за запазване на импулса в съвременната терминология) става генератор на това, което днес наричаме ФИЗИКА.

Литература

[1] J.-P. Provost, C. Bracco (2008) arXiv:0812.2755 [physics.pop-ph].

[2] Ю.Г. Павленко (2002) *Лекции по теоретической механики*, ФИЗМАТЛИТ, Москва.

[3] Maris van Haandel and Gert Heckman (2009) *The Mathematical Intelligencer* **31** 40-44.

Laplace–Runge–Lenz Vector. Part I: Kepler Problem

Ilya V. Petrov
Faculty of Physics, St. Kliment Ohridski University of Sofia,
5 James Bourchier Blvd., 1164 Sofia

Abstract: A proof of Kepler' laws exploiting the Laplace–Runge–Lenz vector is presented. The approach is believed to be useful in teaching physics to freshmen or even to high school students. The original Newton force definition is also discussed.