Физика: Методология на обучението **8** (2020) 28–39

Защо и как да превърнем една стандартна задача в малък изследователски проблем[1]

Христо ПОПОВ
Софийски университет Св. Климент Охридски, Физически факултет,
София 1164, бул. Джеймс Баучер 5

Във всяка гимназия със сигурност не всяка година и не във всяка паралелка се появяват ученици, чиито познавателни потребности остават незадоволени от равнището на общообразователната подготовка по физика. Това са бъдещи физици, инженери, лекари и въобще специалисти, спецификата на работата на които изисква задълбочени знания по физика и умения за тяхното практическо прилагане. Причините за това положение са комплексни и не на последно място сред тях е дефицитът на учебно време. Ако отчетем, че, първо, днес вероятността това време да се увеличи е нула, второ, съществува възможност в учебния план за 11. и 12. клас на профилите Математически и Природни науки физиката да се окаже нито задължителен, нито незадължителен профилиращ предмет и, трето, че в повечето случаи по обясними причини такъв ученик няма възможност да постъпи в школата на Теодоси Теодосиев, то, за да не го изгубим като бъдещ специалист, трябва да търсим други форми за задоволяване на неговите потребности.

Един начин за преодоляване тази слабост на системата предоставя индивидуалната работа с ученика. (Тук и по-нататък терминът *ученик* се употребява само за притежаващите качествата и амбициите на потенциални участници в казанлъшката школа.) Допълнително и, нещо повече – неотчитано досега обстоятелство, което съществено облекчава тази форма на работа, произтича от наличието на разнообразни възможности за връзка, предоставяни от навлезлите в бита информационно-комуникационни средства. Благодарение на тях за индивидуална работа вече не е необходим пряк контакт между учителя и ученика, което от своя страна дава възможност за много по-чести, макар и виртуални срещи.

За сега решаването на задачи в клас се използва предимно за затвърдяване на знанията и проверка и оценка на уменията за тяхното прилагане. За тези цели е достатъчна най-простата схема, в която решението завършва с намиране на отговора. Ако тази схема се отвори, съвкупност-

[1] Разширен вариант на доклад, подготвен за 48. Национална конференция по въпросите на обучението по физика.

ISSN 1314–8478

та на постижимите образователни цели може да се обогати значително, като включи и засилване на интереса към физиката, и развиване на логическото мислене, и запознаване с методи на научното познание, и разнообразяване на междупредметните връзки, и ред други. При сегашните ограничения на учебното време, това нито е възможно при работата в клас, нито е необходимо на всички ученици. То обаче може да се окаже полезно при индивидуалната работа с онези, които бяха визирани по-горе.

Като пример за подобно излизане извън стандартната схема може да послужи решението на следната задача от материала за 8. клас:

> *Два платнохода K' и K'' плават насрещно с постоянни скорости v' и v''. Когато разстоянието между тях е s_0, от K' към K'' със скорост v полита гълъб[2]. След срещата с K'' гълъбът лети обратно, пресреща K', отново лети към K'' и така снове докато корабите се срещнат. Колко е изминатият от гълъба път L?*

В неявен вид условието на задачата предполага, че трите скорости изпълняват неравенствата $v' \leq v$ и $v" \leq v$, т.е. гълъбът е по-бърз от корабите, защото в противен случай те ще се срещнат, преди той да се върне на K'. Освен това разглеждаме v, v' и v'' като **големини** на съответните скорости, т.е. – като неотрицателни числа.

А. Стандартно решение

Стандартното решение отчита, че времето t до срещата на корабите не зависи от движението на гълъба, т.е. условието всъщност преплита две елементарни задачи:

> *След колко време t се срещат два кораба, които се намират на разстояние s_0 и се движат един срещу друг със скорости v' и v'' съответно?*

Решението е почти очевидно: в момента на срещата сумата от пътищата на корабите е равна на началното разстояние ($v't + v''t = s_0$) и търсеното време е $t = s_0/(v' + v'')$.

> *Какъв път L изминава за време $t = s_0/(v' + v'')$ гълъб, летящ със скорост v?*

[2] В други версии на условието вместо кораби и гълъб участва муха, летяща между насрещно движещи се влакове. Разбира се, като по-екзотичен, този случай е и по-интригуващ, но той е нереален, защото, първо, мухата трудно би изпреварила влак и, второ, гълъбът е както по-бърз от корабите, така и по-издържлив в полет от мухата. (В една модерна версия на задачата вместо муха или гълъб би участвувал дрон.)

Отговорът е също очевиден:

$$L = \frac{v}{v' + v''} s_0. \tag{1}$$

Какви продължения допуска задачата **след** получаване на отговора?

Преди всичко тук спадат различни следствия от формула (1). Фактът, че $L \sim s_0$, може да се смята тривиален, така че по-интересно е как пътят на гълъба зависи от трите скорости.

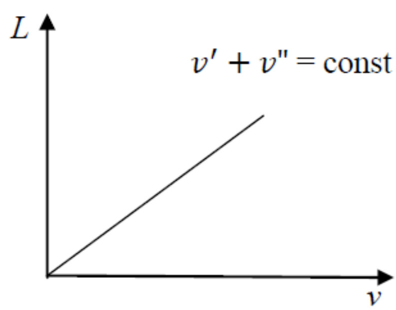
Първият извод от (1) е, че от значение за L са не скоростите на корабите поотделно, а само тяхната сума $v' + v''$, която, по същество, представлява големина на относителната скорост на единия кораб спрямо другия. Това обстоятелство позволява (при фиксирано s_0!) да разглеждаме (1) като функционална зависимост от вида:

$$F(L, v, v' + v'') = 0$$

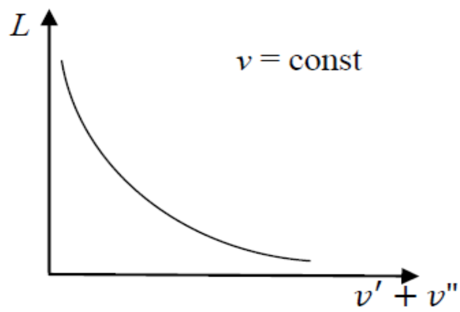
не между четири, а само между три величини. Решена спрямо L, v, v' или v'', тази зависимост дава възможност да изследваме връзката ѝ с останалите, което от своя страна разкрива възможности за графично онагледяване на резултатите.

• Правата пропорционалност между L и v също може да се предвиди при един качествен анализ на ситуацията. Формула (1) показва, че и като функция на скоростта на гълъба, и като функция на относителната скорост, дължината на пътя на гълъба се изменя в интервала $0 \leq L \leq \infty$ (Фиг. 1 и Фиг. 2).

При обсъждане на правата пропорционалност между L и v може да се обърне внимание на следното привидно противоречие. Фигура 1 показва, че при $v = 0$ и L е нула. От друга страна, $v = 0$ означава, че гълъбът не лети, а пътува върху кораба K' така, че до срещата на корабите изминатият от него път няма да бъде нула. Очевидно противоречието се дължи



Фиг. 1.



Фиг. 2.

на факта, че с L означаваме не разстоянието изминато от гълъба как да е, а това, което той е **прелетял**.

Тълкувание заслужават и двата екстремни (гранични) случая при фиксирана скорост на гълъба (Фиг. 2). Предвид направеното в началото уточнение, че скоростите са неотрицателни числа, то $v' + v'' = 0$ означава, че и $v' = 0$, и $v'' = 0$, т.е., и двата кораба са неподвижни. В този случай те никога няма да се срещнат, гълъбът ще лети безкрайно дълго време между единия и другия и, с каквато и скорост да лети, неговият път L ще бъде безкрайно дълъг. Другият граничен случай – когато относителната скорост на корабите е безкрайно голяма, при всяка стойност на s_0 те ще се срещнат мигновено и пътят на гълъба, с колкото и голяма скорост да лети, ще бъде $L = 0$.

• От факта, че L зависи от v' и v''не поотделно, а от тяхната сума следва и изводът, че L може да има една и съща стойност при различни скорости v' на единия кораб, стига скоростта v'' на другия кораб да има подходяща големина. Това дава възможност да се постави следната допълнителна задача:

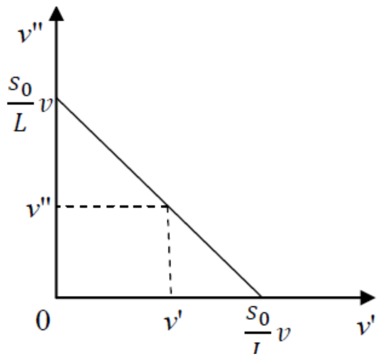
> *Какъв е интервалът от стойноти на скоростта v', за които може да се подбере такава скорост v'', че пътят на гълъба да има определена стойност L.*

Решението изисква формула (1) да се разглежда като уравнение за неизвестата v'' и резултатът е:

$$v'' = -v' + \frac{s_0}{L} v \,. \tag{2}$$

В задачата се търси в какъв интервал може да се изменя v'. Този интервал се определя от условието, че двете величини v' и v'' са неотрицателни. Оттук следва, че:

$$0 \leq v' \leq \frac{s_0}{L} v \,.$$



Фиг. 3.

Този резултат става по-разбираем, ако се представи графично (Фиг. 3). На фигурата е показана отсечката в първи квадрант (заради условието $0 \leq v'$, $0 \leq v''$) от правата с уравнение (2), която сключва ъгъл $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ с абсцисата. От графиката се вижда, че, ако скоростта на първия кораб е $v' = s_0 v/L$, за да бъде пътят на гълъба до срещата равен на L, вторият кораб трябва да бъде неподвижен, т.е. $v'' = 0$ и обратно. И тъй като по начало $v' \leq v$, то следва, че подобна ситуация може да се реализира само при условие, че $L \leq s_0$.

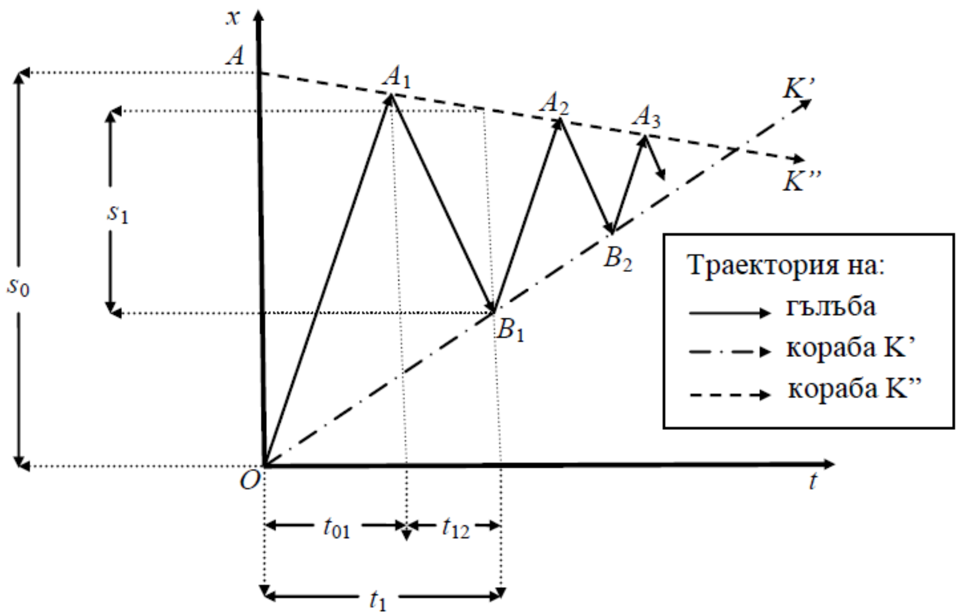
Разбира се, формула (1) дава възможности и за други заключения.

Б. Нестандартно решение

Независимо от това, дали се следват възможните продължения на стандартното решение, възможно е да се потърси друго, нестандартно решение, като движението на гълъба се проследява в детайли. На Фиг. 4. са показани траекториите на трите тела: корабът K' и гълъбът тръгват от т. O, а корабът K'' – от т. A, отстояща на разстояние s_0 от т. O. Начупената линия OA_1B_1 представлява първи етап от полета на гълъба. В края на неговата първа част (момент t_{01}) в т. A_1 гълъбът среща кораба K'', след което през втората част на етапа за време t_{12} се връща на K'. В края на първия етап, чието времетраене е $(t_{01} + t_{12})$, разстоянието между корабите е s_1. Вторият етап (начупената линия $B_1A_2B_2$) е подобен на първия, като различно е само началното разстояние между корабите. Така полетът на гълъба се разделя на безброй еднотипни, все по-кратки етапи.

Сумата от пътя vt_{01} на гълъба и пътя $v''t_{01}$ на K'' през първата част OA_1 на първия етап, е равна на началното разстояние между корабите, т.е.:

$$s_0 = vt_{01} + v''t_{01} \,. \tag{3}$$



Фиг. 4.

Оттук намираме времето до първата среща на гълъба с K'':

$$t_{01} = \frac{s_0}{v + v''} \; . \tag{4}$$

За време t_{01} корабът K' скъсява разстоянието до K'' с $v' t_{01} = \dfrac{v'}{v + v''} s_0$. Тъй като за същото време K'' изминава разстояние $v'' t_{01} = \dfrac{v''}{v + v''} s_0$, при обратния полет ситуацията е като началната, но разстоянието между корабите е не s_0, а:

$$s'_0 = s_0 - v' t_{01} - v'' t_{01} = \frac{v - v'}{v + v''} s_0 \; . \tag{5}$$

Следователно времето t_{12} за обратния полет на гълъба до K' и разстоянието s_1 между корабите в края на първия етап ще получим, като във формула (4) и (5) разменим местата на v' и v'', а s_0 заменим с s'_0. Така намираме:

$$t_{12} = \frac{s'_0}{v + v'} = \frac{v - v'}{(v + v')(v + v'')} s_0 \, , \tag{6}$$

$$s_1 = \frac{v - v''}{v + v'} s'_0 = \frac{(v - v')(v - v'')}{(v + v')(v + v'')} s_0 \; . \tag{7}$$

От (4) и (6) получаваме общото време t_1 за изминаване на първия етап:

$$t_1 = t_{01} + t_{12} = \frac{2v}{(v+v')(v+v'')} s_0 \,, \tag{8}$$

така че през първия етап общият път на гълъба е:

$$l_1 = vt_1 = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v'')} s_0 \,. \tag{9}$$

Търсеният общ път L на гълъба е сума от дължините l_1, l_2, l_3 ... на всички етапи. За по-голяма прегледност на следващите равенства е удобно да въведем два безразмерни параметъра p и q:

$$p = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v'')} \quad \text{и} \quad q = \frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')} \,. \tag{10}$$

С тяхна помощ формулите за времето t_1 (8), за пътя l_1 (9) и за разстоянието s_1 (7) се записват във вида:

$$t_1 = p\frac{s_0}{v} \,, \quad l_1 = ps_0 \quad \text{и} \quad s_1 = qs_0 \,. \tag{11}$$

Тъй като етапите са еднотипни, изразите за пътя l_2 на гълъба и за разстоянието s_2 между корабите в края на втория етап записваме, като в съответните изрази от (11) заменим индексите “0” с “1” и “1” с “2”:

$$l_2 = ps_1 = pqs_0 \quad \text{и} \quad s_2 = qs_1 = q^2 s_0 \,. \tag{12}$$

По същата логика изразите за величините след третия етап ще бъдат:

$$l_3 = ps_2 = pq^2 s_0 \quad \text{и} \quad s_3 = qs_2 = q^3 s_0 \,,$$

и т.н., така че търсеният общ път L на гълъба е:

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots = ps_0 + ps_0 q + ps_0 q^2 + ps_0 q^3 + \cdots \,. \tag{13}$$

По-нататъшните действия зависят от това, в кой клас е ученикът, с който са работи.

Вариант 1: Ученикът е в 8.–10. клас

В този случай познанията на ученика по математика не са достатъчни и той не може да пресметне сумата на безброй много величини, които участват в дясната страна на (13). Възможно е обаче да се възползваме от факта, че всъщност отговорът на задачата е вече известен. Това обстоятелство позволява да обърнем логиката на разсъжденията и да приравним десните страни на (1) и (13). По този начин “ще изведем физически” една математическа формула, която се изучава едва в профилираната подготовка по математика в 11. клас [1].

Следвайки тази логика, от (1) и (13), след отчитане на (11) получаваме:

$$ps_0 + ps_0 q + ps_0 q^2 + ps_0 q^3 + \cdots = ps_0 \frac{(v + v')\,(v + v'')}{2v\,(v' + v'')} \;. \tag{14}$$

С помощта на (11) дробта в дясната страна на (14) може да се представи във вида:

$$\frac{(v + v')\,(v + v'')}{2v\,(v' + v'')} = \frac{1}{\frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')}} = \frac{1}{1 + \frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')} - 1} = \cdots = \frac{1}{1-q} \tag{15}$$

и, след съкращаване на ps_0, от (14) получаваме търсената формула:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \;. \tag{16}$$

Сам по себе си този резултат е вече достатъчно впечатляващ: с помощта на една елементарна кинематична задача успяхме “да изведем” формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия!

Разбира се, от математична гледна точка “изводът” на (16) има своите слаби страни. Преди всичко той не изяснява при какви условия е приложима формулата. (Пример за неприложимост: за сумата $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots$ формула (16) дава абсурдния резултат -1.)

Освен това при прехода от (14) към (16) съкратихме на ps_0 – операция, изискваща прилагане на правилото за изваждане на общ множител пред скоби. За сума от безброй много събираеми обаче това правило също невинаги е приложимо. Като пример отново може да послужи сумата $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots$. Ако я означим с x и приложим това правило, получаваме уравнение:

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + 2(1 + 2 + 4 + \cdots .) = 1 + 2x,$$

чието решение е отново абсурдът $x = -1$.

По същата логика, но значително по-лесно извод на (16) може да се направи като се използва апорията на Зенон за Ахил и костенурката [2], защото в този случай се разглежда движението на само две, а не както тук – на три тела.

Вижда се, че нестандартното решение предоставя на учителя разнообразни възможности за превръщане на задачата в предизвикателство за ученик от 8. – 10. клас. За целта е достатъчно да предложим на ученика първо да реши задачата по стандартния начин, след което да го насочим към нестандартното решение. Той би трябвало самостоятелно да стигне до изразите за l_1, l_2, l_3 ... и до формула (13). След това, с помощта на учителя, по описания по-горе път трябва да направи прехода от (13) до (16). (Разбира се, математическите умения на ученика трябва да позволяват свободно боравене с изрази от типа на (15).)

С какво подобен начин на разсъждение може да учуди ученика, да събуди интереса му? Преди всичко с "откритието", че е възможно сумата от безброй много положителни числа да бъде крайно число!

В обсъждането учителят следва чрез споменатите абсурди да обърне внимание на ограничената приложимост на формула (16). Едно очевидно необходимо условие за приложимостта ѝ е например събираемите в сумата да намаляват. Дали то е и достатъчно обаче ученикът, ще научи едва в часовете по математика в 11. клас. Подобни обсъждания безусловно спомагат за развитие на критичното мислене и обогатяват междупредметните връзки с математиката.

Фактът, че нестандартният извод на формула (16) не отговаря на ред въпроси има и своята положителна страна: той показва сложността на проблема и дава възможност на ученика сам да търси отговори. (Такъв например е въпросът защо в едни случаи формула (16) дава смислен резултат, а в други – безсмислен.)

Разгледаният пример показва, че без да използваме термини като безкрайна редица, граница, критерии за сходимост, дори без изобщо да говорим за геометрична прогресия, по най-елементарен начин можем да отворим едно малко прозорче, през което ученикът да надникне в необятния свят на математиката.

Вариант 2: Ученикът е в 11. – 12. клас

В този случай ученикът познава материала от темата за числови редици в Модул 2 на Учебната програма за профилирана подготовка по математика [1] и във формула (13) разпознава, че става дума за сума на една безкрайна геометрична прогресия с начален член ps_0 и частно q. Чрез неравенствата $v' \leq v$ и $v'' \leq v$ и формулите (11) той проверява изпълнението на условието $0 < q < 1$ и по този нестандартен начин чрез познатата му формула (16) получава отново резултата (1).

Нестандартното решение, макар и доста по-трудоемко, също предоставя различни възможности за работа след получаване на отговора.

- Първо, то подкрепя твърдението, че отговорът на задачата е *единствен* и не зависи от начина на решаване. С други думи потвърждава вътрешната съгласуваност на използваните зависимости, а това твърдение е вече познание от по-високо равнище, своего рода метапознание.

- Второ, нестандартното решение разкрива възможности за разглеждане на въпроси, чиито отговори са недостижими за стандартното решение. Такъв например е въпросът колко курса ще направи гълъбът между корабите до срещата им в една реална ситуация, в която телата не се разглеждат като материални точки (вж. напр. [3, 4]). За получаване на отговора са достатъчни знанията на логаритмичната функция, получени в часовете по математика [5]. Оказва се, че този отговор също е впечатляващ, защото, ако скоростта на корабите е примерно 10 m/s, а на гълъба – 20 m/s, при начално разстояние 9 km, докато корабите се сближат на 30 cm, гълъбът ще направи само 4–5 курса между тях, а за останалото до окончателната среща време (т.е. за части от секундата) броят на курсовете е безкрайно голям.
- Трета възможност е с помощта на формули, получени в хода на решението, да се търси отговор на въпроса, за колко време гълъбът ще направи определен брой курсове (или обратно – колко курса ще направи за определено време).
- Четвърта е възможността да се обсъди един въпрос, който всъщност няма отговор (или, в зависимост от гледната точка, може да се смята неправомерен):

  Ако в момента на срещата всяко тяло смени посоката на скоростта си на обратната, къде ще се окаже гълъбът, когато корабите се върнат в изходните си позиции?

  На пръв поглед във въпроса няма нищо особено – логиката подсказва, че щом корабите се върнат там, откъдето са тръгнали, в същия момент и гълъбът ще бъде върху кораба, от който е полетял. Оказва се обаче, че ситуацията е по-сложна: в която от двете посоки да полети гълъбът след срещата, той ще изпревари кораба, плаващ в тази посока, и изобщо няма как да стигне до другия кораб, за да се върне. Смяната на посоките на скоростите обаче е равнозначна на смяна на посоката на времето. Тогава възниква далеч по-фундаментален проблем: наистина ли законите на механиката са инвариантни по отношение на обратимостта на времето? Този проблем е обсъждан многократно както във връзка са тази задача, така и за подобната ситуация, възникваща при движението на кораб към един от земните полюси по локсодрома (варианти на отговори може да се намерят например в [6, 7]).

- Пета възможност предоставя промяната на условието на задачата, като се разгледа случаят, в който корабите не се срещат, а се настигат и се търси формула, валидна и в двата случая. Възможно е да се анализира и най-общият случай на произволни посоки на скоростите на корабите, но в него разглежданията се усложняват от факта, че корабите могат да се срещнат само при определено съотношение между големините на техните скорости. В този случай траекторията на гълъба вече не е фиксирана, въпреки че изминатият от него път е напълно определен. Този вариант е подходящ за демонстриране на възможностите на графичния метод (вж. с. 372 от [2]).

От изложеното се вижда, че възможностите за продължаване на работата върху една задача след получаване на отговора ѝ са многобройни и разнообразни. Сред тях са и търсенето на алтернативни решения, и обсъждане на следствия от отговора, и разглеждане на различни екстремални случаи, и поставяне на допълнителни въпроси, изоставяне на някои опростяващи допускания (напр. идеализации) с цел доближаване до реални ситуации, и мн. др. Те подлежат на изследване и систематизиране.

По такъв начин, продължавайки работата по задачата след намиране на отговора ѝ, можем да я превърнем в малък изследователски проблем, проблем, който поставя пред ученика различни предизвикателства. Ясно е също така, че решението на не всяка задача допуска подобно развитие, но ако учителят прегледа задачите, с които работи, лесно ще открие сред тях подходящи за целта. Те несъмнено притежават голям потенциал да възбудят любопитството, да разпалят въображението, да удивят с елегантността на използваните средства и/или с получените неочаквани резултати. А всичко това в крайна сметка допринася както за поддържане и развиване на интереса към физиката, така и за задоволяване на познавателните потребности на ученика.

В заключение следва отново да се подчертае необходимостта учителят по физика целенасочено да издирва талантливите ученици и им отделя по-голямо внимание чрез индивидуална работа с тях. Известно е, че докато работата с класа често води до разочарования, заниманията с такива ученици доставят на учителя емоционално удовлетворение и несъмнено представляват интелектуална инвестиция в бъдещето. За да се осъществи обаче едно такова преориентиране на част от вниманието от класната към индивидуалната форма на работа, е необходимо изпълнението на поне две условия: първо, физичната колегия следва организационно да помогне да се намерят начини за отчитане, поощряване и популяризиране на тази дейност на учителите, и второ, специалистите по методика на обучението да помогнат на учителите с конкретни разработки за индивидуална работа с учениците.

Литература

[1] Учебна програма за профилирана подготовка по математика, mon.bg/bg/100598.

[2] http://www.phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/I chast/1 metodika/.

[3] elearning-phys.uni-sofia.bg/∼cpopov/125+33 zadachi po fizika.pdf, с. 363.

[4] Попов Хр. Физични задачи – решения с продължения. Използване на графи след решаването на физична задача, *Физика: Методология на обучението* **7** (2019), 114–126.

[5] Учебна програма по математика за 11. клас общообразователна подготовка, https://www.mon.bg/bg/100522.

[6] http://elearning-phys.uni-sofia.bg/ cpopov/Praktikum/zadachi_paradoksi.pdf.

[7] Гарднер М. *Крестики–нолики*, М., “Мир”, 1988.