Физика: Методология на обучението **8** (2020) 106–111

За Ахил, костенурката и още нещо

Христо ПОПОВ

Софийски университет Св. Климент Охридски, Физически факултет, София 1164, бул. Джеймс Баучер 5

Пандемията, предизвикана от коронавируса, ни принуди да форсираме въвеждане на дистанционното обучение. Независимо от оценките за ефикасността от тази нова за нас форма, която стана възможна благодарение на невероятния напредък през последните десетилетия на информационните технологии, тенденцията за нарастване на нейното значение е очевидна, независимо от увереността, че поне в обозримото бъдеще тя няма да измести класните форми. (Тук трябва да направя уговорката, че самото понятие *обозримо бъдеще* рязко променя значението си, като видимо стана функция на времето. Докато някога можеше да се правят достоверни прогнози за живота на няколко поколения напред, днес са рисковани прогнозите дори в рамките на едно поколение.)

Докато масовото и пълноценно използване на дистанционното обучение на всички ученици изисква наличие на материални условия (както хардуер, така и софтуер), каквито далеч не навсякъде са налице, има един случай, в който това условие е изпълнено. Това е случаят на немногото, но все пак намиращи се ученици, чиито умствени заложби предполагат успешно усвояване на природните науки. Това са бъдещите физици, инженери, лекари и пр., чиито познавателни потребности днес са най-ощетени от недостатъците на образователната ни система.

Един начин за преодоляване тази слабост на системата предоставя индивидуалната работа с ученика. (Тук и по-нататък терминът *ученик* се употребява само за онези, които притежават качествата и амбициите на един потенциален участник в казанлъшката школа на Т. Теодосиев.) Допълнително и, нещо повече – неотчитано досега обстоятелство, което съществено увеличава възможностите на тази форма на обучение, произтича от наличието на разнообразни нови начини за връзка, предоставяни от навлезлите в бита информационно–комуникационни средства. Днес практически както всяко дете, така и неговият учител притежава смартфон (при това нерядко смартфонът на ученика е класи по-добър от този на учителя). А това означава, че в този случай поне необходимите материални условия са налице. (За останалите условия ще споменем

ISSN 1314–8478

в края.) Благодарение на тях за индивидуална работа вече не е необходим **пряк** контакт между учителя и ученика, което от своя страна дава възможност за много по-чести, макар и виртуални техни срещи.

По-долу се обръща внимание на някои възможности за индивидуална работа, които предоставя решаването на физични задачи. За сега в клас задачите се използват предимно за затвърдяване на знанията и проверка и оценка на уменията за тяхното прилагане. За тези цели е достатъчна най-простата схема, в която решението завършва с получаване на отговора. Ако тази схема се отвори, съвкупността на постижимите образователни цели може да се обогати значително, като включи и засилване на интереса към физиката, и развиване на логическото мислене, и запознаване с методи на научното познание, и разнообразяване на междупредметните връзки, и ред други. При сегашните ограничения на учебното време, това нито е възможно при работата в клас, нито е необходимо на всички ученици. То обаче може да се окаже полезно при индивидуалната работа с онези от тях, които бяха визирани по-горе.

Удобен пример за излизане от рамките на схемата чрез търсене на различно решение представлява апорията на Зенон за Ахил и костенурката. Като начало може да поставим следната кинематична задача, решението на която е достъпно за осмокласници:

> *Древногръцкият герой, бързоногият Ахил е на разстояние s от една костенурка. За колко време t ще я настигне, ако я подгони със скорост V, а тя му "бяга" със скорост v?*

(Разбира се, величините може да се зададат **и** с числени стойности, но след решението трябва да се използват само буквените им означения.)

Стандартното решение използва факта, че пътят *Vt* на Ахил и пътят *vt* на костенурката са свързани с равенството:

$$Vt = vt + s\,,$$

откъдето за търсено време намираме:

$$t = \frac{s}{V - v}\ . \qquad (1)$$

На практика формула (**??**) представлява отговор на задачата и в традиционния подход бихме спрели дотук. Какви възможности за работа след получаване на отговора предоставя на учителя тази задача? Преди всичко следва да запознаем ученика с апориите на Зенон Александрийски и по-специално с най-известната от тях, в която древногръцкият философ "доказва", че Ахил всъщност никога няма да настигне костенурката. Според Зенон, ако Ахил е 10 пъти по-бърз от костенурката, докато той пробяга разстоянието s, тя вече ще се е отдалечила на разстояние $s/10$. Докато Ахил измине това допълнително разстояние, тя ще се окаже на разстояние $s/100$ от него и т.н. – до безкрайност. Така се стига до абсурдния извод, че между Ахил и костенурката винаги остава някакво, макар и постоянно намаляващо разстояние.

За да разкрием причината за противоречието между очевидното решение и твърдението на Зенон, придаваме количествена форма на неговите разсъждения.

Ахил пробягва разстоянието s за време $t_1 = \frac{s}{V}$. За това време костенурката изминава път $vt_1 = \frac{v}{V}s$ и на Ахил ще му трябва време:

$$t_2 = \frac{v}{V}\frac{s}{V},$$

за да пробяга и това разстояние. А, тъй като за времето t_2 костенурката е успяла да "пробяга" още някакво разстояние, по същия начин пресмятаме, че на Ахил ще му е необходимо време:

$$t_3 = \left(\frac{v}{V}\right)^2 \frac{s}{V},$$

за да преодолее и него и т.н.

Общото време, необходимо на Ахил за настигане на костенурката е:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \frac{s}{V}\left(1 + \frac{v}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \cdots\right) \tag{2}$$

От този момент нататък вариантите за работа са два, в зависимост от това в кой клас е ученикът.

Вариант 1: Ученикът е в 11. – 12. клас

В този случай той познава материала от темата за числови редици в Модул 2 на Учебната програма за профилирана подготовка по математика [1] и в дясната страна на равенствата (2) разпознава, че става дума за сума на една безкрайна геометрична прогресия с частно $q = \frac{v}{V}$. От условието на задачата (става дума за движение на човек и костенурка!) следва, че $0 < \frac{v}{V} < 1$, т.е. прогресията е намаляваща. Този факт позволява да приложим познатата формула, след което, разбира се, отново получаваме резултата (1). Това показва, че изглежда Зенон не е допускал възможността сума от безброй положителни числа да бъде крайно число, поради което възниква и парадоксът.

От педагогическа гледна точка каква полза може да се извлече от подобно разглеждане? Първо, научавайки за съществуването на т.нар. апории на Зенон, ученикът, най-общо казано, разширява своя културен кръгозор. Този факт може да го стимулира да потърси в интернет информация както за другите апории на Зенон (например "доказателството", че една стрела изобщо не може да лети), така и за други начини за разсъждение върху разгледаната апория (неслучайно от хилядолетия с нея са се занимавали философи, логици, математици и др.).

Второ, и по-важно: фактът, че, решавайки една задача по два различни начина, получаваме един и същ резултат, подкрепя твърдението, че отговорът на задачата е *единствен*, т.е. не зависи от начина на решаване. С други думи потвърждава вътрешната съгласуваност на използваните зависимости, а това твърдение е вече познание от по-високо равнище, своего рода метапознание.

Вариант 2: Ученикът е в 8. – 10. клас

В този случай ученикът не е запознат с геометричните прогресии, няма представа дали и кога може да се говори за тяхна сума и т.н. Поради това след достигане до формула (2) логиката в разсъжденията може да се обърне. Това означава да се опрем на интуитивно ясния факт, че отговорът на една задача не трябва да зависи от начина на решаването ѝ, и да използваме, че вече знаем отговора на задачата за Ахил и косгенурката. Този начин на разсъждение позволява да приравним десните части на (2) и (1):

$$\frac{s}{V}\left(1+\frac{v}{V}+\left(\frac{v}{V}\right)^2+\cdots\right)=\frac{s}{V-v}=\frac{s}{V}\left(\frac{1}{1-\frac{v}{V}}\right),$$

така че, като означим отношението на двете скорости с x, получаваме известната формула за сума на безрайна намаляваща геометрична прогресия:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}\ . \tag{3}$$

Това вече е и нов подход, и нов резултат: като се използва един начин за решаване на една задача, резултатът да се използва за получаване на ново знание чрез друг начин на решаване на същата задача. С какво подобен начин на разсъждение може да учуди ученика, да събуди интереса му? Преди всичко с "откритието", че е възможно сумата от безброй много положителни числа да бъде крайно число!

Разбира се, всичко това не отменя необходимостта в 11. клас да се изучава материала за геометрични прогресии, защото този подход не дава отговор на важния въпрос, винаги ли сумата на една геометрична прогресия може да се пресмята по формула (3)? Необходимостта от обсъждането му се демонстрира лесно, като опитаме да приложим формулата за пресмятане сумата на прогресията с частно $x = 2$. Абсурдността на получения резултат (-1) ясно показва, че използването на формула (3) изисква изпълнение на някакви условия за x, които тук не се изясняват. В разгледания пример приложимостта на формулата се гарантира от подразбиращото се от само себе си предположение, че Ахил със сигурност е по-бърз от всяка костенурка (т.е. $v < V$).

Нещо повече, оказва се, че още в хода на разсъжденията сме използвали операция, която не винаги е допустима. Става дума за записа на формула (2), в която сме извадили пред скоба общ множител (в случая $\frac{s}{V}$) на *безкраен* брой събираеми. Докато за суми от краен брой събираеми това е възможно винаги, при безкрайните суми приложимостта на това действие също не е безусловна. Наистина, ако общ множител може да се вади **винаги** пред скоби, за сумата $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ бихме могли да получим уравнението:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 1 + x\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) = 1 + xS\,,$$

чието решение при $x = 2$ е отново абсурдното $S = -1$.

Фактът, че нестандартният извод на формула (3) не отговаря на ред въпроси има и своята положителна страна: той показва сложността на проблема и дава възможност на ученика сам да търси отговори. (Такъв например е въпросът защо в едни случаи формулата дава смислен резултат, а в други – безсмислен.)

Въпреки тези уговорки относно направения "физичен" извод на формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия, фактът, че без да използваме термини като безкрайна редица, граница, критерии за сходимост, дори без изобщо да говорим за прогресии, с елементарни средства достигнахме един достатъчно впечатляващ резултат. С него и с обсъждането на необходимостта от условия за приложимост на формулата даваме на ученика възможност да надникне през едно малко прозорче в необятния свят на математиката.

От изложеното се вижда, че възможностите за продължаване на работата върху тази задача след получаване на отговора ѝ са многобройни и разнообразни. Сред тях са и търсенето на алтернативни решения, и обсъждане на следствия от отговора, и разглеждане на различни екстремни случаи, и поставяне на допълнителни въпроси, отказ от някои опростяващи допускания с цел доближаване до реалната ситуация, и мн. др. Те подлежат на изследване и систематизиране – елементи на такива може да се намерят в посочените източници.

По такъв начин, продължавайки работата по задачата след намиране на отговора ѝ, можем да я превърнем в малък изследователски проблем, проблем, който поставя ученика в активна позиция и го изправя пред различни предизвикателства. Ясно е също така, че решението не на всяка задача допуска подобно развитие, но, ако учителят прегледа задачите, с които работи, лесно ще открие сред тях подходящи за целта. Те несъмнено притежават голям потенциал да възбудят любопитството, да разпалят въображението, да удивят с елегантността на използваните средства и/или с неочакваността на получените резултати. А всичко това в крайна сметка допринася както за поддържане и развиване на интереса към физиката, така и за задоволяване на познавателните потребности на ученика.

В заключение следва отново да се подчертае необходимостта учителят по физика целенасочено да издирва талантливите ученици и да им отделя специално внимание чрез индивидуална работа с тях. Известно е, че, докато работата с класа често води до разочарования, заниманията с такива ученици доставят на учителя емоционално удовлетворение и несъмнено представляват интелектуална инвестиция в бъдещето. За да се осъществи обаче едно такова преориентиране на част от вниманието от класната към индивидуалната форма на работа, е необходимо изпълнението на поне две условия: първо, физичната колегия следва организационно да помогне да се намерят начини за отчитане, поощряване и популяризиране на тази дейност на учителите, и, второ, специалистите по методика на обучението да помогнат на учителите с конкретни разработки, подходящи за индивидуална работа с учениците.

Литература

[1] Учебна програма за профилирана подготовка по математика, mon.bg/bg/100598.

[2] http://www.phys.uni-sofia.bg/c̃popov/Almanah-pdf/I chast/1 metodika/.

[3] elearning-phys.uni-sofia.bg/ cpopov/125+33 zadachi po fizika.pdf.

[4] Хр. Попов (2019) Физични задачи – решения с продължения. Използване на графи след решаването на физична задача. *Физика: Методология на обучението* **7** 34-46; http://physika-bg.org/.