

## Още един пример за разширено решение на задача

**Христо Попов**

Софийски университет Св. Климент Охридски, Физически факултет,  
София 1164, бул. Джеймс Баучер 5

Продължаването на работата по една задача, след като е получен отговорът ѝ, е дейност, която: първо, разнообразява постижимите образователни цели [1]; и второ, способства да се засили мотивацията за изучаване на физика. Един от начините за такова разширяване на решението се свежда до идентифициране и освобождаване от някои ограничения, неспоменати в явен вид в условието на задачата.

За илюстрация на този начин тук се използва популярна задача от сборника на Ch. Trigg *Mathematical Quickies* ([2] – руски превод):

*Момче, момиче и куче. Момче върви със скорост 4 km/час, момиче – със скорост 3 km/час, а куче бяга със скорост 10 km/час. Момчето и момичето едновременно<sup>1</sup> тръгват от една точка и в една и съща посока по пътя, а кучето започва да бяга от единия към другия, оставайки през цялото време между тях. Къде ще се окаже кучето след час и в коя посока ще гледа?*

В книгата е поместено решението на А. Остин, публикувано в *Mathematics Magazine* 44 56, January 1971:

*Да си представим, че поставим кучето в произволна точка от отсечката, свързваща момчето и момичето един час след началото на движението, а муцуната му е обърната в която и да е от двете възможни посоки. След това “да превъртим целия филм” в обратна посока, докато момчето, момичето и кучето не се окажат всички заедно в началното си положение, където са били преди тръгването. По този начин се оказва, че час след началото на движението кучето може да се окаже на произволно място между момчето и момичето, гледайки в която и да е от двете възможни посоки.*

Това решение впечатлява със своята **елегантност**, при което позоваването на обратимостта на времето при механичните явления наистина представлява “черешката на тортата”. Освен това то **шокира** със заклю-

<sup>1</sup>Текстовете в получерно са подчертани от автора.

чението, че “...час след началото на движенията кучето може да се окаже на произволно място...”, заключение, което поражда съмнения или в Лапласовия детерминизъм, според който началните условия определят състоянието на една механична система във всеки следващ момент, и/или в обратимостта на времето, според която при смяна на знака на времето системата стига началното си състояние, преминавайки в обратен ред през всички междинни състояния.

Както условието, така и решението на задачата предоставят редица възможности за продължаване на работата върху нея, които могат да заинтересуват ученик, който се учи да разсъждава като физик.

1. Преди всичко разширяването на решението може да започне с обсъждане на въпроса, защо в условието на задачата не е посочено в кой момент и от кое място стартира кучето. Казва се само, “...кучето започва да бяга от единия към другия, оставайки **през цялото време между тях**”. Тъй като “цялото време” включва и началния момент, това означава, че тримата участници тръгват едновременно, а тъй като изрично е указано, че момчето и момичето тръгват от **една** точка, за да бъде и в този момент “**между тях**”, кучето трябва да тръгне от същата точка. Към това заключение навежда и твърдението в решението, според което можем да превъртим филма в обратна посока “...докато момчето, момичето **и кучето** не се окажат всички заедно в началното си положение, където са били преди тръгването...”.

Ако обаче тримата участници стартират едновременно и от едно място, изискването в условието през цялото време кучето да бъде между момичето и момчето не може да бъде изпълнено: като най-бързо, кучето още в началото ще излезе напред и ще продължи да бяга в началната посока, без да настига или пресреща някого.

Следователно фактът, че в условието не са посочени началните условия за кучето не е случаен – описаният в решението сценарий е възможен само благодарение на него.

2. Направеният извод открива път за следващо разширение, което е свързано с въпроса “Съществуват ли начални условия, при които се реализира сценарият на Остин?” За да отговорим, ще използваме следните кратки означения за тримата участници: К – за кучето, Ю – за момчето (юношата) и Д – за момичето (девойката). Условието на задачата съдържа три твърдения:

- (а) Ю и Д тръгват едновременно.
- (б) Ю и Д тръгват от едно и също място.
- (в) К се намира винаги между Ю и Д.

Разсъжденията в 1. разкриват несъвместимостта на тези три условия

и ситуацията, описана в решението на Остин. Ако обаче е нарушено поне едно от тях, решението може да се запази.

Да допуснем, че не е изпълнено (а), т.е. Ю и Д стартират в различни моменти. Ако Д тръгне от същото място със закъснение  $\Delta t$  след Ю, К може да стартира от това място в момент  $t$  от интервала  $0 < t \leq \Delta t$ . В този случай остава неопределен началният момент на тръгване на К, но (б) и (в) са изпълнени и движенията протичат, както е описано в решението.

Да допуснем, че не е изпълнено (б), т.е. Ю и Д могат да стартират от различни точки. В този случай е достатъчно в началния момент Ю да се намира на разстояние  $\Delta x$  пред Д. Тогава, ако К се намира между Д и Ю на разстояние  $x$  от Д, т.е. при  $0 \leq x < \Delta x$ , тримата участници могат да стартират едновременно и отново въпросният сценарий ще бъде изпълнен. В този случай остава неопределено началното положение на К, но (а) и (в) са изпълнени.

Третият случай е, когато (а) и (б) са изпълнени, но е нарушено (в). В този случай е достатъчно К да се намира на някакво разстояние  $\Delta x$  пред стартовата линия на Ю и Д, които тръгват едновременно. За да се осъществи интересуваният ни сценарий, е достатъчно К да изчака и да се включи в движението, след като покрай него мине Ю, но преди да го е достигнало Д. (При това К може да тръгне както напред, така и назад.) В този трети случай началното положение на К е указано, но неопределен остава моментът, в който то се включва в движението.

Нарушения на повече от едно от трите условия не са интересни, защото това би ни отдалечило още повече от началната задача. Общ за трите разгледани случая е фактът, че при всеки от тях съществува неопределеност в началните условия за кучето. При това положение констатацията, че и крайното му състояние (след един час) е неопределено, вече престава да бъде шокираща. Във всеки от случаите, ако липсващата информация за началното положение и момента на тръгване на кучето се зададе, пресмятането на крайното му положение и посоката на скоростта става възможно и не е необходимо да се позоваваме на обратимостта на времето.

3. Направените в 1. и 2. разсъждения не са достатъчни, за да изчислят окончателно съмненията относно детерминизма на Лаплас и обратимостта на времето, защото решението на Остин съдържа едно неоспоримо твърдение: Ако Ю и Д се намират съответно на 4 km и на 3 km от стартовата линия, а К – в произволна точка между тях, и ако тримата едновременно се отправят към старта, след един час наистина всички ще се окажат там, независимо откъде е тръгнало кучето. Съществен в случая е фактът, че това не е начално положение на участниците за нито един

от разгледаните по-горе три случая.

Това твърдение обаче е несъвместимо едновременно с Лапласовия детерминизъм и/или с обратимостта на времето. Наистина, ако от различни начални състояния системата попада в едно и също крайно състояние, не е определено в кое от тях ще се върне тя при обръщане на времето. С други думи, на различни начални състояния трябва да съответстват различни крайни състояния, а се оказва, че в нашия случай с децата и кучето това изискване не е изпълнено.

При това положение наистина като че ли трябва да правим избор между Лапласовия детерминизъм и обратимостта на времето. Всъщност, това е псевдодилема – съществува и трета възможност. За да стигнем до нея, трябва да обърнем внимание, че дотук разглеждахме участниците в движението като материални точки. По определение обаче едно тяло може да се разглежда като материална точка, когато разстоянията до другите тела са големи в сравнение с размерите му. Размерите на разглежданите в случая тела са от порядъка от няколко до десетина дециметра. Когато се връщат към стартовата линия обаче, разстоянията между телата намаляват и клонят към нула, което показва, че вече не може да ги разгледаме като материални точки – необходимо е да отчитаме реалните им размери. Именно идеализацията “материална точка” е първопричината за поява на **особена точка** в траекторията на кучето, при приближаване на която то на крайно разстояние трябва да промени посоката на скоростта си безброй много пъти.

И така, възникналото в случая противоречие се дължи на неправомерното използване на понятието **материална точка**. В динамиката подобен проблем, произтичащ от нарушаване на условията, които допускат използване на идеализацията “материална точка”, бе обсъждан напр. в [3]. Разгледаният тук пример показва, че той може да възникне и в една чисто кинематична ситуация.

4. Както бе отбелязано в началото, често в условията на задачите не са споменати фактори, които са съществени за решението, но се смята, че се подразбират. В случая такъв фактор е географската ширина на мястото, където се намират децата и кучето: мълчаливо се предполага, че действието се развива далече от географския полюс. Освобождаването от това предположение разкрива съвсем нови възможности за разширяване на решението, които практически нямат връзка с разгледаните дотук.

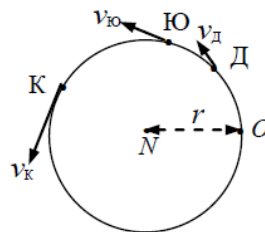
Да си представим, че стартът на Ю, Д и К е на нашите географски ширини, а посоката на скоростите им – на изток, т.е. те се движат по един географски паралел. Всичко, казано в т. 1 и т. 2 остава валидно. Дори

стартът им да се измести на север в Норвегия, порядъците на зададените скорости (до 10 km/ч) и на времеия интервал (1 ч) подсказват, че все още може да разглеждаме движенията като праволинейни. Ако обаче стартът продължи да се измества на север и разстоянието до Северния полюс стане от порядъка на няколко километра (т.е. от порядъка на изминатите за час разстояния), ще възникне качествено нова обстоятелство: ще трябва да отчитаме, че движейки се в една и съща посока (на изток!), участниците всъщност се движат не по права линия, а по окръжност.

Значението на този факт става ясно, ако променим условието на задачата, като вече включим в него и началните условия за кучето:

**Момче, момиче и куче.** Момче върви със скорост  $v_{Ю} = 4$  km/ч, момиче – със скорост  $v_{Д} = 3$  km/ч, а куче бяга със скорост  $v_{К} = 10$  km/ч. Момчето, момичето и кучето тръгват едновременно от една точка на изток, а кучето започва да бяга от единия към другия, оставайки през цялото време между тях. Къде ще се окаже кучето след  $T = 1$  ч и в коя посока ще гледа, ако стартират близо до Северния полюс?

Ако стартовата т.  $O$  е на няколко километра от Северния полюс  $N$ , остава решението, обсъждано в т. 1 – на фиг. 1 е показано едно примерно разположение на участниците 1 час след началния момент, когато това разстояние е примерно  $r \sim 5$  km. (При такива разстояния може да се приеме, че няма значение дали разстоянието до полюса се мери по отсечката до него, или по дъгата от меридиана.) Очевидно е, че по принцип данните в условието на задачата са достатъчни да се определи положението и посоката на скоростта на  $K$  един час след началото на движението, т.е. отпадат както необходимостта от “превъртане на филма обратно”, така и всякакви съмнения в основите на механиката.



Фиг. 1.

Как се променя ситуацията, ако продължим да преместваме старта към полюса, т.е. – да намаляваме  $r$ ? Дължината на паралела, по който

обикалят участниците в движението постепенно намалява и след час К се оказва все по-близо до Д. При определена стойност на разстоянието  $r_0$  до полюса точно след 1 час К ще се окаже точно там, където е и Д, т.е. разликата от изминатите от тях пътища ще стане  $2\pi r_0$ :

$$v_K T - v_D T = 2\pi r_0 \quad \text{или} \quad r_0 = \frac{v_K - v_D}{2\pi} T = \frac{7}{2\pi} 1 \approx 1,11 \text{ km.}$$

При  $r < r_0$  К ще настигне Д, преди да изтече един час, и през оставащите до края на часа минути ще пресреща Ю. По принцип и в този случай може да се пресметне положението на К в момента на изтичане на единия час, стига да не се е осъществила срещата му с Ю. Ако означим с  $r_1$  разстоянието до полюса, при което тази среща се осъществява точно след час, при още по-малки разстояния (т.е. за  $r < r_1$ ) ще трябва да отчитаме, че К отново бяга към Д, но отново можем точно да пресметнем къде ще се намира К в края на часа.

По този начин се оказва, че в зависимост от разстоянието  $r$  от т. О до полюса движението на К се състои от подобни един на друг етапи, чиито брой расте, а дължината и продължителността им намаляват с намаляването на  $r$ . Този извод остава валиден дотогава, докато разстоянието  $r'$  до полюса стане толкова малко, че за един час момчето настигне момичето, т.е. тогава, когато разликата в пътищата им за 1 час стане  $2\pi r'$ :

$$v_{Ю} T - v_{Д} T = 2\pi r \quad \text{или} \quad r = \frac{v_{Ю} - v_{Д}}{2\pi} T = \frac{1}{2\pi} 1 \approx 0,32 \text{ km.}$$

И така, при радиус на паралела около 320 m, един час след старта тримата участници в “обиколката на Северния полюс” ще се окажат в една и съща точка, като броят на пробяганите от К етапи расте неограничено, а продължителността им – става все по-по-кратка (клони към нула). Оттук нататък, ако участниците продължат движенията си по окръжността с радиус  $r'$ , всичко се повтаря циклично, като в общия случай всеки нов цикъл започва от различна начална точка. (Разбира се, в този случай кучето трябва да **помни**, че когато се намира на едно и също място с момчето и момичето, трябва да бяга в тяхната посока. Това уточнение е необходимо, тъй като в момента, когато тримата се засекаат в една и съща точка, посоката на скоростта на К е неопределена.)

По същия начин може да се разсъждава и ако радиусът на траекторията, по която се осъществява движението, е по-малък от  $r'$ . Същественият резултат от тези разсъждения е, че във всички случаи (т.е. за произволни стойности на  $r$  и  $T$ ) местоположението на кучето след време  $T$  по принцип може да се определи.

Задачата става по-реалистична, ако в условието участват не деца и куче, а три самолета: малък частен самолет, чиято скорост е няколкостотин километра в час, авиолайнер, летящ със скорост около 800–900 km/ч, а “ролята” на кучето играе свръхзвуков изстребител. В този случай, ако времето за полета е не един час, а повече, може да се разгледат интересни ситуации и траектории, доста по-отдалечени от полюса.

Това четвърто разширение на решението също допуска интересни продължения.

**4.1.** Възможно е на направените разглеждания да се придаде количествен характер, като се потърси израз, който определя положението на  $K$  като функция от времето при различни радиуси на окръжността. В този случай времето трябва да се раздели на цикли, а всеки цикъл на два етапа (в първия  $K$  догонва  $D$ , а във втория – пресреща  $Ю$ ).

**4.2.** Възможно е количествените разглеждания да се направят за случая, в който кучето тръгва в посока, обратно по посоката, в която вървят децата и получения резултат да се сравни с този от 4.1.

**4.3.** Условието на задачата и решението може да се преформулират, вече без отношение към земната повърхност и географските координати, като в условието се фиксира, че траекторията на тримата участници е затворена непресичаща се крива и се изследват различните случаи, които са реализират в зависимост от нейната дължина и от разстоянията, изминавани от тях за определено време.

Това са само някои от възможните продължения на работата след решението на оригиналната задача. Други интересни продължения може да се направят към четвъртото продължение, в което наистина се реализира описаната от Остин ситуация, да се разсъждава върху принципните различия между движение по отворена и при затворена траектория, върху обратимостта на времето и Лапласовия детерминизъм в случая на движение по произволна затворена крива и др.п.

## Литература

- [1] Хр. Попов (2020) Защо и как да превърнем една стандартна задача в малък изследователски проблем. *Физика, методология на обучението* **8** 28-39.
- [2] Ч. Тригг (1975) “Задачи с изюминкой”. М., Мир, задача 319.
- [3] Хр. Попов (2020) Земята пада върху Слънцето – тема с вариации. *Физика: Методология на обучението* **8** 112-131.