

## Решение на задачата от кн. 4, 2018

Ристе Митроски

**ЗАДАЧА.** Две еластични тела с известни маси и скорости се удрят централно. Съществува ли величина, която определя кое от телата ще увеличи енергията си след удара? Анализирайте условията, при които след удара едно от телата остава неподвижно.

**РЕШЕНИЕ.** Тъй като в условието не се говори за сили, действащи върху телата (т.е. те взаимодействат само в момента на удара и няма външни сили), за краткост под енергия ще разбираме тяхната кинетична енергия.

Маса, скорост и енергия се изключват от кръга на възможните отговори, защото лесно се намират примери, които показват, че при удар енергия може да придаде както по-лекото на по-тежкото тяло, така и обратно – по-тежкото на по-лекото; както по-бързото на по-бавното, така и обратно; както тялото с по-голяма енергия на тялото с по-малка енергия, така и обратно. За намиране на отговора са достатъчни законите за запазване на енергията и импулса.

Нека  $m$  и  $M$  ( $m < M$ ) са масите на телата,  $v$  и  $V$  – проекциите на техните скорости в момента преди удара върху правата, минаваща през двата центъра на масите, а  $u$  и  $U$  – проекциите на съответните скорости след удара. За конкретност за положителна приемаме посоката на скоростта преди удара на по-масивното тяло (т.е. във всички случаи смятаме  $V > 0$ ).

Законите за запазване на енергията и на импулса осигуряват две уравнения:

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{MU^2}{2} + \frac{mu^2}{2}, \quad (1a)$$

$$MV + mv = MU + mu, \quad (1b)$$

чието съвместно решаване позволява да изразим  $u$  и  $U$  чрез  $v$  и  $V$ :

$$U = \frac{M - m}{M + m}V + \frac{2m}{M + m}v, \quad (2a)$$

$$u = \frac{m - M}{M + m}v + \frac{2M}{M + m}V. \quad (2b)$$

От (2) за промяната на енергията на по-масивното тяло получаваме формулата:

$$\Delta E = \frac{MU^2}{2} - \frac{MV^2}{2} = \frac{2mM}{(M+m)^2} (MV + mv)(v - V). \quad (3)$$

(Очевидно същият израз, но с обратен знак, описва промяната на енергията на по-лекото тяло.)

Величината:

$$p = MV + mv \quad (4)$$

представява проекция на общия импулс на системата върху началната посока на движение на по-масивното тяло, така че окончателно:

$$\Delta E = \frac{2mM}{(M+m)^2} p(v - V). \quad (5)$$

Знакът на  $\Delta$  определя кой кому придава енергия: при  $\Delta < 0$  енергията на по-масивното тяло намалява, т.е. при удара то придава енергия на по-лекото и обратно – при  $\Delta > 0$  по-лекото тяло придава енергия на по-тежкото. Формула (5) показва, че за изясняване от какво зависи този знак, трябва да се разгледат два случая:

- (а) насрещен удар – при него  $v < 0$  и знакът на разликата  $(v - V)$  е фиксиран ( $v - V < 0$ ), но знакът на импулса  $p$  е неопределен;
- (б) удар между еднопосочно движещи се тела – при него  $v > 0$  и знакът на импулса  $p > 0$  е фиксиран, но знакът на разликата  $(v - V)$  е неопределен.

**(а) Насрещен удар.** В този случай от  $v - V < 0$  и (5) следва, че знакът на  $\Delta$  се определя единствено от знака на  $p$ . Тъй като преди удара посоките на импулсите на двете тела са противоположни, то отговорът на поставения въпрос е:

- Когато по големина импулсът на по-масивното тяло превишава импулса на по-лекото, то  $p > 0$ ,  $\Delta E < 0$ , т.е. енергия се предава от по-масивното на по-лекото тяло.
- Когато по големина импулсът на по-лекото тяло превишава импулса на по-масивното, то  $p < 0$ ,  $\Delta E > 0$ , т.е. енергията на по-масивното тяло расте за сметка на енергията на по-лекото.

*Извод:* Резултатите се изразяват удобно, ако говорим за *посока на преноса на енергия*, като под този термин разбираме посоката от тялото, което отдава енергия към тялото, което приема и увеличава енергията си. Тъй като и двата случая тялото с по-голям импулс предава енергия на

тялото с по-малък импулс, заключението е, че при насрещен удар величината, която определя в коя посока се предава енергия е общият импулс на системата: енергията се предава по посока на импулса.

*Следствие:* Когато общият импулс на системата е нула ( $|\frac{v}{V}| = \frac{M}{m}$ ), при удара телата не обменят енергия, което означава, че скоростите им се запазват по големина и само сменят посоката си на противоположната.

От формули (2) следват и определени заключения относно възможността след удара едно от телата да остане неподвижно или да смени посоката на движението си. Тъй като и  $v < 0$ , и  $m - M < 0$ , то двете събираеми в дясната страна на (2б) са положителни и следователно  $u > 0$ , т.е. след насрещен удар по-лекото тяло не може да остане неподвижно и непременно сменя посоката на движението си.

Положението при по-масивното тяло е по-сложно. При относително бавно движение на лекото тяло масивното тяло просто забавя движението си след удара, като от (2а) следва, че  $U = 0$  при  $v' = -\frac{M-m}{2m}V$ , т.е. при тази стойност на  $v$  масивното тяло след удара остава в покой. При по-голяма скорост на по-лекото тяло ( $v > v'$ ) и двете тела сменят посоките на скоростта си.

Тези изводи съответстват на интуитивните представи за последиците от насрещни удари.

**(б) Удар между еднопосочно движещи се тела.** В този случай  $V > 0$ ,  $v > 0$ , така че и  $p > 0$ , а знакът на  $\Delta$  се определя от знака на разликата  $v - V$ . При  $v > V$ , удар може да има, когато по-лекото тяло настига по-масивното, и в този случай от (5) следва  $\Delta E > 0$ , и енергията на масивното тяло расте. В другия случай, когато по-масивното тяло настига и удря по-лекото (т.е.  $v < V$ ),  $\Delta E < 0$  – по-масивното тяло отдава енергия на по-лекото.

*Извод:* При удар между еднопосочно движещи се тела енергия винаги печели по-бавното тяло, независимо от това, дали то е по-леко или по-масивно. И тъй като в този случай и началните скорости на телата, и общият импулс на системата са еднопосочни, отново можем да заключим, че преносът на енергия при удара е в посока на импулса на системата.

Този извод също съответства на интуитивната представа за последиците от ударите.

Тъй като в случая и двете събираеми в дясната страна на (2а) са положителни, не е възможно след удара  $U = 0$ , т.е. не е възможно след удара по-масивното тяло да остане неподвижно. От (2б) следва, че при

$v'' = \frac{2M}{M-m}V > V$  след удара по-лекото тяло спира, а при скорост  $v > v''$  след удара започва да се движи в обратна посока.

И така, общият извод е, че при насрещен удар може да се спре само по-масивно тяло, а при удар на еднопосочно движещи се тела може да се спре само по-леко тяло.

Резултатите от разглеждането на случаите а) и б) може да се обобщят във вида:

*При централен еластичен удар между две тела посоката на предаване на енергията съвпада с посоката на общия импулс на системата.*

Следователно отговорът на въпроса, зададен в условието на задачата е: при централен еластичен удар между две тела величината, която определя посоката на предаване на енергия е **общият импулс на системата**.

*Тема за размисъл:* Възможно ли е да се направят подобни разглеждания, но засягащи не енергиите, а импулсите на удрящите се тела?