

Парадокс на Архимед

Христо Попов

Абстракт. Дискутира се възможна парадоксална ситуация, която може да възникне при буквално използване на традиционната формулировка на закона на Архимед – т.нар. *парадокс на Архимед*.

В една от книгите¹ си Луис Карол, известният автор на *Алиса в страната на чудесата*, привежда следния диалог между свои герои:

– *Още едно камъче, и ще потъне!*

– *Бих искал да знам какво правиш с тези кофички?*

Действащи лица: Хю и Ламберт. Място на действието: плажа в Литъл Мендип. Време на действието: 1 часа и 30 минути след обед. Хю пуска малка кофичка да плава в друга, с малко по-големи размери, и се опитва да определи колко камъчета може да побере малката кофичка, преди да потъне...

Хю няколко минути седи мълчаливо и обмисля нещо, след което скача на крака и вика:

– *Ламберт, виж какво ще ти покажа сега! За нищо на света няма да се сетиш! ... Помниш ли какво ни казваше Балбус днес сутринта? Тяло, изцяло потопено във вода, измества количество течност, равно на обема му. Така ли е? – попита Хю.*

– *Наистина Балбус разправяше нещо от този род, – неуверено се съгласи Ламберт.*

– *А сега, погледни тук! Виж: малката кофичка е почти изцяло потопена във водата. Следователно, тя трябва да измества количество вода, равно на обема ѝ. Аз вземам и – раз, два, три! – вадя малката от по-голямата кофичка.*

С тези думи Хю извади малката кофичка, а голямата връчи на Ламберт.

– *Гледай! Водата в голямата кофичка е съвсем малко. Мислиш ли, че това нищожно количество вода е колкото обема на малката кофичка?*

– *Ами, трябва да бъде равно, – каза Ламберт.*

¹Кэррол Л., *История с узелками*, Мир, Москва, 1973.

– А ето, че не е! – тържествуващо възкликна Хю и преля водата от голямата кофичка в малката. – Виждаш ли, водата стига едва до половината на кофичката.

– Нейна работа докъде се е напълнила, – казва Ламберт. – Щом Балбус е казал, че обемите са равни, значи са равни. Можеш да не се съмняваш.

Всъщност, Луис Карол описва ситуация, известна като **парадокс на Архимед**. Казано кратко, парадоксът се състои в това, като че ли едно тяло (малката кофичка) измества повече, отколкото е наличната (в голямата кофичка) вода. Или още по-кратко: като че ли едно тяло измества нещо, което го няма?!

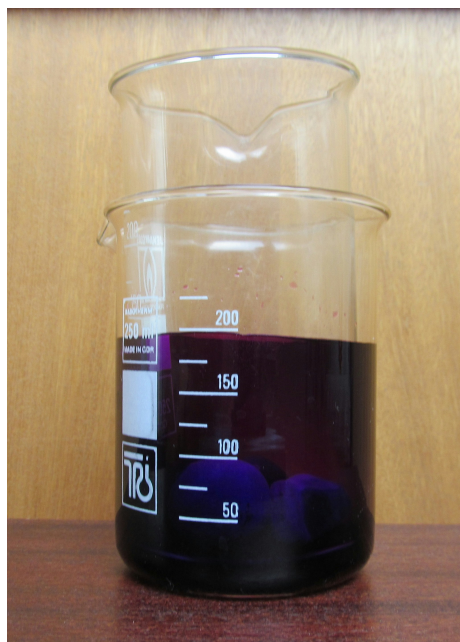
На “експеримента” на Хю с кофичките лесно може да се предаде количествен характер с помощта на две бехерови чаши с близки диаметри. На фиг. 1 една по-тясна чаша плава в оцветена вода, налята в по-широка чаша. Вижда се, че сумата от обемите на водата и на потопената част от тясната чаша е 200 cm^3 . На фиг. 2 тясната чаша е отстранена и по скалата върху стената на широката отчитаме, че количеството на водата е само 50 cm^3 . Оттук следва, че обемът на потопената част на тясната чаша е бил $200 - 50 = 150\text{ cm}^3$. Би трябвало да кажем, че, плавайки, тясната чаша измества 150 cm^3 вода. В това е и същността на парадокса на Архимед: очевидно не е възможно да се изместят 150 cm^3 , когато цялото количество вода е само 50 cm^3 !

Парадоксът очевидно се дължи на смисъла, който влагаме в глагола **измествам**. И в българския, и в руския (*вытеснять*), и в английския (*displace*) език (а вероятно и в много други езици) се предполага, че може да се **измести** само нещо, което притежава **местоположение**, а за това е необходимо то да съществува, да бъде в наличност. Когато казваме обаче, че потопеното тяло *измества* толкова вода, колкото е обемът на потопената му част, трябва да разбираме само, че, ако пространството, заето от тази потопена част, запълним с вода, наоколо няма да настъпят никакви промени (т.е. равнището на водата няма да се промени, независимо дали става дума за равнището в по-широката чаша, или за равнището на световния океан).

И въпреки всичко, когато формулираме закона на Архимед, винаги говорим за *изместено* количество флуид. Ето пример от учебника по физика и астрономия за 8. клас на изд. Просвета (2009 г.):

На всяко тяло, потопено в течност или газ, действа изтласкваща сила, равна на теглото на течността или газа, изместени от тялото.

С телата, потопени в газ (обикновено – въздух) проблем няма – газовете нямат свободна повърхност, тялото винаги се оказва заобиколено от всички страни от газа, в който е потопено. Парадокс може да възник-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

не, когато разглеждаме тела, потопени в ограничено количество течност – както в случаите с кофичките и с бехеровите чаши.

Какъв е изводът? Следва ли да смятаме цитираната формулировка на закона на Архимед некоректна? И, ако отговорът на този въпрос е утвърдителен, следва ли да се стремим да я заменим с друга? Например, ако искаме да бъдем съвсем точни, би трябвало да изкажем закона по следния начин:

На всяко тяло, потопено в течност, действа изтласкваща сила, равна на теглото на течността, имаща обем, равен на обема на потопената част от тялото.

Или:

На всяко тяло, потопено в течност, действа изтласкваща сила, равна на теглото на течността, която би запълнила обема на потопената част от тялото.

Няколко са аргументите в полза на запазването на старата, макар и не съвсем коректна формулировка на закона на Архимед:

- Тя е очевидно по-лека, по-нагледна и затова – по-лесно запомняща се от приведените коректни формулировки.
- В житейските ситуации, в които прилагаме закона на Архимед, парадокс не възниква, тъй като при тях телата плават или се потапят

в неограничени (или поне достатъчно големи) количества течност (кораб, плаващ по река, в море и др.п.). Парадоксът е налице само в екстремната ситуация, когато размерите на тялото и на съда, в който е течността, са близки.

- Очевидно към факторите, които подкрепят запазването на досегашната формулировка на закона, трябва да се отнесе и традицията, която е твърде добре вкоренена, за да си мислим, че си заслужава усилието да я променяме. (Поради същата причина не се стараем да приучим хората да казват вместо “пакет захар **тежи** един килограм” – “**масата** на пакет захар е един килограм”, макар че на самия пакет точно така е отбелязано: “Маса 1 kg”.) Вниманието, което тук отделяме на парадокса на Архимед, се дължи само на желанието да подскажем на учителя как да реагира в случай, че му се наложи да обяснява на някой по-буден ученик, какво означава да се измести нещо, което липсва.

Освен чрез демонстрационния опит, илюстриран на фиг. 1 и фиг. 2, учениците може да бъдат запознати с парадокса на Архимед и заинтересувани от обсъждането му, като потърсят отговор на следния провокативно поставения въпрос:

Може ли крайцер да плава в кофа вода?

Преди всичко трябва да се има предвид, че в българския език изразите *кофа вода* и *кофа с вода* не са равностойни. В първия случай се фиксира само количеството на водата – примерно 10 l, докато във втория случай освен количеството се фиксира и формата, която кофата придава на водата, т.е. в този случай вече се има предвид конкретно тяло.

Ако поставеният по-горе въпрос се приеме буквално, т.е. ако схващаме водата като тяло с определени форма и размери (формата и размерите на кофата), отговорът е очевидно отрицателен – няма как да се помести крайцер в кофа с вода. Ако обаче разбираме водата само като определено количество – примерно 10 литра, отговорът не е толкова очевиден и по въпроса в интернет се срещат най-различни мнения и дискусии – някои от тях по-повърхностни, други – по-задълбочени.

Тук предлагаме едно разсъждение, което формално води до заключението, че 10 литра вода са достатъчни, за да плава в тях крайцер. За да стане ясно по принцип на какво се опира подобно парадоксално заключение ще използваме цитираната по-горе коректна формулировка на закона на Архимед.

Според нея, ако искаме да определим дали тялото плава или потъва, трябва да сравним силата на тежестта, която му действа, с теглото на водата, която **би изпълнила** обем, равен на обема на потопената част от

тялото. Нито в закона, нито при това сравняване не става дума за количеството течност, която е около тялото – формално то би могло да бъде произволно малко.

За да стигнете до положителния отговор на поставения въпрос за крайцера, разсъждавайте по следния начин.

Представете си крайцера, плаващ в езеро. Представете си също така, че водата в езерото започва постепенно да замръзва от бреговете навътре и от дъното нагоре². В началото водата около крайцера е достатъчно и той продължава да плава, защото теглото на изместената от него вода продължава да е равно на тежестта му. По-нататък замръзването на езерото продължава, но по много специален начин: така, че когато ледът доближи кораба, във всеки момент дебелината на водния слой между леда и обшивката на кораба, макар и намаляваща с времето, е еднаква навсякъде. (С други думи, формира се лед с вдлъбнатина, точно повтаряща формата на потопената част на кораба – нещо като леярска форма, в която може да се отлее копие на тази потопена част.)

Ясно е, че с напредване на замръзването, незамръзваният воден слой между кораба и леда изтънява, количеството вода в него намалява, но корабът продължава да плава в нея. Ясно е също така, че ще настъпи момент, когато количеството вода ще стане равно и дори по-малко отколкото водата в една кофа – и въпреки това крайцерът ще продължи да плава!

А какъв е неформалният отговор? За да получим по-неформален отговор, нека конкретизираме ситуацията. Да предположим, че масата на крайцера³ е $M = 30\,000\text{ t} = 3 \cdot 10^7\text{ kg}$. Формата на потопената част на кораба е сложна, но за опростяване на разглеждането ще приемем, че става дума за паралелепипед с дължина 100 m и широчина 30 m, т.е. площта на хоризонталното сечение (на дъното на кораба) е $S_1 = 100 \times 30 = 3 \cdot 10^3\text{ m}^2$.

Да пресметнем първо дълбочината h , на която “гази” крайцерът. Ако означим с $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$ плътността на водата, условието за плаване е:

$$Mg = \rho g S_1 h, \text{ откъдето } h = \frac{M}{\rho S_1} = \frac{3 \cdot 10^7}{10^3 \times 3 \cdot 10^3} = 10\text{ m}.$$

Тъй като периметърът на хоризонталното сечение на паралелепипеда е $L = 2 \times 100 + 2 \times 30 = 260\text{ m}$, околната повърхност на потопената

²В случая не ни интересува фактът, че в природата процесите протичат в обратна посока, т.е., че водата във водоемите замръзва от повърхността надолу.

³Използваните тук и по-нататък числа са примерни и единствената претенция е, че не се отличават от реалността на порядъци!

част е $S_0 = Lh = 260 \times 10 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ m}^2$. Като добавим към нея и площта на дъното, получаваме, че общата площ на потопената част на кораба е $S = 2,6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3 = 5,6 \cdot 10^3 \text{ m}^2$. Обемът на кофа вода е примерно $V_0 = 10 \text{ l} = 10^{-2} \text{ m}^3$. Ако пресметнем дебелината d на водния слой, който би се получил, ако разстелем такова количество вода върху площ S , получаваме:

$$d = \frac{V_0}{S} = \frac{10^{-2}}{5,6 \cdot 10^3} \approx 10^{-6} \text{ m}.$$

Това означава, че когато количеството не замръзнала вода между кораба и леда остане само 10 l, между обшивката на краба и повърхността на леда се поместват от порядъка на $10^3 - 10^4$ водни молекули, т.е. между тях има толкова мономолекулни водни слоя. Отново формално погледнато, според закона на Архимед като че ли има достатъчно вода за плаване на кораба. Все пак обаче редица въпроси остават без отговор. Тъй като законът на Архимед е следствие от закона на Паскал, можем ли да разчитаме, че последният е валиден и за слой течност с дебелина $1 \mu\text{m}$? А каква е ролята на ред други ефекти, които имат значение при подобни дебелини – напр. повърхностното напрежение, капилярните ефекти? Разбира се, разсъждавайки така, ние не обръщаме внимание на практическата невъзможност да се създаде леярска форма, която с точност, по-добра от $1 \mu\text{m}$, да повтаря формата на крайцера, на трудностите за точното му балансиране във вдлъбнатината на формата и т.н.

Така че отговорът на поставения въпрос вероятно би трябвало да изглежда така: плаването на крайцер във водата от една кофа е практически невъзможно, а теоретически – неясно.

Всеки, който се интересува от проблема, може да проследи на адрес <http://www.wiskit.com/marilyn/battleship.html> посветената на него дискусия. Освен всичко друго, тя още веднъж показва колко многоаспектна може да бъде и една наглед несложна физична ситуация.

Paradox of Archimedes

Christo Popov

Abstract: Discussed is a possible paradoxical situation that can arise when using conventional literal wording of the law of Archimedes, i.e. Archimedes paradox.