

Векторът на Лаплас–Рунге–Ленц. Част II: Разсейване на Ръдърфорд; Движението в равнина и алгебрата на комплексните числа*

Иля В. Петров

Софийски Университет Св. Климент Охридски,
Физически факултет, София 1164, бул. Джеймс Баучър 5

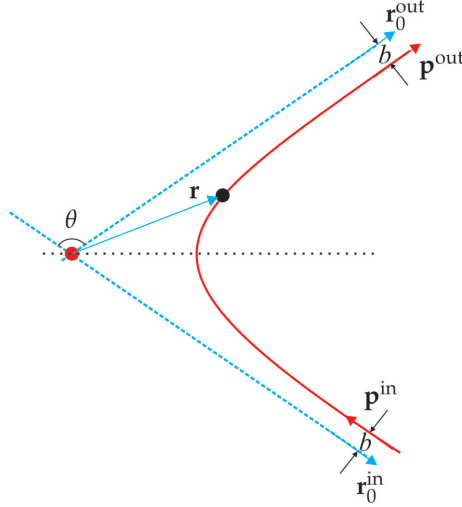
Абстракт. Работата е продължение на статията [1], в която бе въведен векторът на Лаплас–Рунге–Ленц. Разгледано е приложението му при извода на класическата формула на Ръдърфорд за разсейване. Обсъдена е също дуалността на Нютоновия закон за гравитация със закона на Хук, като се използва подходяща параметризация на траекториите в комплексната равнина. Изложението изисква математически познания на бакалавърско ниво. За да се запази връзката със средното образование, е показан, в духа на Нютон, геометричен извод на производни на тригонометрични функции.

РАЗСЕЙВАНЕ В КУЛОНОВ ПОТЕНЦИАЛ. ФОРМУЛА НА РЪДЪРФОРД

За физиката експериментът и последвалото обяснение на разсейването на α -частици от тънко метално фолио играе ролята на крайъгълен камък, указващ нова парадигма за устройството на света. Моделът на атома, предложен от Ръдърфорд, е основа не само на атомната и квантовата физика, но и ново разбиране за химическите свойства на елементите (таблицата на Менделеев е построена първоначално въз основа на атомните тегла, т.е. на масата на атомите, а не на електрическия товар на ядрото). От друга страна, нерелативистката задача за разсейване на заредени частици от точков източник на Кулоново поле е пример, водещ към разбиране на съвременните експерименти в областта на елементарните частици, които се провеждат с ускорителите в ЦЕРН, Брукхевън и т.н.

За съжаление в повечето учебници по механика при извода на формулата на Ръдърфорд не се използва допълнителната симетрия, дължаща се на запазването на вектора на Лаплас, и изложението става трудно, с много и непрости математични пресмятания. По-долу предлагаме извод, достъпен за студентите-бакалаври. Идеята е почерпана от работите на С.Е. Aguiar и М.Ф. Barroso [2] и Т. Takehara [3].

*Тази работа е разширена версия на доклад, представен на XLIV Конференция по въпросите на обучението по физика, 7–10 април 2016, Ямбол



Фиг. 1. Траектория на частица, идваща от безкрайност с импулс $\mathbf{p}^{\text{in}}$ и отиваща в безкрайност по хиперболична крива с импулс $\mathbf{p}^{\text{out}}$. Обърнете внимание, че $|\mathbf{p}^{\text{in}}| = |\mathbf{p}^{\text{out}}| = p$, тъй като системата е консервативна, а прицелното разстояние b е едно и също при двата края на хиперболата, така че моментът на импулса се запазва.

Задачата, която разглеждаме, е разсейване на частица в силово поле $\vec{F}(\vec{r}) = km\vec{r}_0/r^2$ (вж. Фиг. 1), където вместо обичайната константа на взаимодействие $\alpha = ZZ'e^2 > 0$, се използва km , за да направим явна аналогията с Нютоновия закон¹. Тъй като енергията на системата е положителна (скупчай на отблъскване), векторът на Лаплас се дефинира като

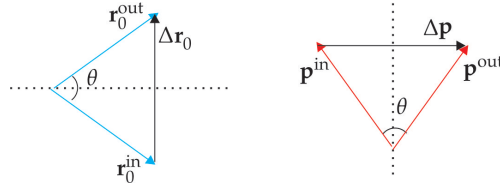
$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + mk\vec{r}/r. \quad (1)$$

Разликата от познатата ни дефиниция [1] се състои единствено в промяната на знака пред втория член. Моментът на импулса $\vec{L}$ е постоянен и е перпендикулярен на равнината на схемата (централно поле, вж. [1]). Следователно големината му е равна на pb , където p е големината на импулса в безкрайност, а b е прицелното разстояние (по дефиниция прицелното разстояние се отчита по нормалата към траекторията в безкрайност, т.е. ъгълът между b и p е $\pi/2$).

Да разгледаме изменението на импулса и радиус-вектора (променливите, участващи в израза за $\vec{A}$ (Фиг. 2)

$$\Delta \vec{p} = 2p \sin(\theta/2) \vec{i}; \quad \Delta \vec{r}_0 = 2 \cos(\theta/2) \vec{j}, \quad (2)$$

¹Обикновено се разглежда разсейване на α -частици от атомни ядра, дължащо се на електростатично взаимодействие, където Ze и $Z'e$ са съответните електрически заряди.



Фиг. 2. Диаграма, показваща измененията $\Delta \vec{p}$ и $\Delta \vec{r}$. Обърнете внимание на ориентацията на векторите ($\Delta \vec{p} \parallel \vec{i}$ и $\Delta \vec{r} \parallel \vec{j}$; $\Delta \vec{p} \perp \Delta \vec{r}$).

където $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са единични ортогонални вектори, формиращи декартова координатната система, свързана с разсейвателния център.

Оттук имаме

$$0 = \Delta \vec{A} = \Delta \vec{p} \times \vec{L} + mk \Delta \vec{r}_0 = \left(-2pL \sin \frac{\theta}{2} + 2mk \cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{j}. \quad (3)$$

Следователно

$$L = pb = \frac{mk}{p} \cot \frac{\theta}{2} \Rightarrow b = \frac{mk}{p^2 \tan(\theta/2)}. \quad (4)$$

Частица с прицелно разстояние между b и $b + db$ се отклонява съответно на ъгъл между θ и $d\theta$, т.е.

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{mk}{2p^2 \sin^2(\theta/2)}. \quad (5)$$

Тогава за диференциалното сечение на разсейване на сноп частици, попадащи в пръстена с площ $d\sigma = 2\pi b db$ и разсейващи се в пространствения ъгъл $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, имаме

$$\left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| = \left(\frac{mk}{2p^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (6)$$

т.е. прочутата формула на Ръдърфорд.

И така, като изключим дефиниционното уравнение (1), за извода на горния израз бяха необходими **само** четири стъпки:

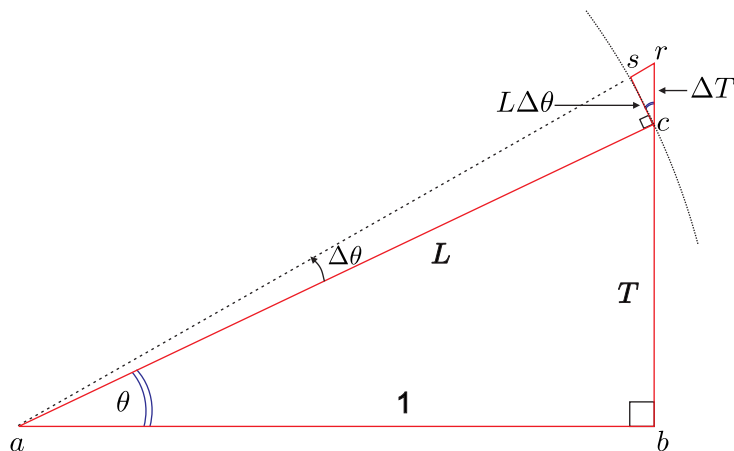
- (i) Определяне на измененията $\Delta \vec{r}$ и $\Delta \vec{p}$ — уравнение (2);
- (ii) Използване на закона за запазване на вектора на Лаплас — уравнение (3);
- (iii) Намиране на параметъра b — уравнение (4);
- (iv) Пресмятане на отклонението Δb , по-точно на производната на $\tan(\theta/2)$ — уравнение (5).

Методичната ефикасност е без коментар!

КАК НЮТОН Е ПРЕСМЕТНАЛ ПРОИЗВОДНАТА НА $\tan$?

Всъщност става дума за една от големите мистерии, свързани с раждането на съвременната физика: Защо инвенторът на диференциалното смятане в своята може би най-важна книга *Principia* използва само геометрични построения? Отговорът, че така ще го разберат по-лесно съвременниците му, не звучи убедително. По-скоро красотата на геометрията и особеностите на аритметиката в равнина са истинската причина. По-долу ще разгледам някои от “древните”, но мисля методически полезни, геометрични представи, свързани с анализа на тригонометричните функции.

- (1) Доказателство на формулата $\frac{d \tan \theta}{d \theta} = 1 + \tan^2 \theta$. Нека с T означим катета, лежащ срещу ъгъла θ в правоъгълния триъгълник abc с хипотенуза L и прилежащ катет с дължина 1 (Фиг. 3). По построение $T = \tan \theta$. Прекарваме допирателна в т. c към окръжност с радиус L и център т. a . Върховете т. s , т. r на триъгълника crs са пресечните точки на лъча от т. a , прекаран под ъгъл $\theta + \Delta\theta$ спрямо прилежащия катет, съответно с допирателната и с продължението на срещулежащия катет T . Сега страната $cr = \Delta T$ е изменението на $T = \tan \theta$, а $L\Delta\theta$ е дължината на дъгата, когато ъгълът се изменя с $\Delta\theta$. Доказателство следва директно, ако проследим изменението на триъгълника crs при граничния преход $\Delta\theta \rightarrow 0$. Дори на фигурата трудно правим разлика между дъгата и отсечката cs , т.е., както Нютон би казал, в поцеса на свиване тяхното “последно отношение” е едини-



Фиг. 3. Триъгълникът на Нютон, с който се извеждат производните на тригонометричните функции.

ца, или $cs = L\Delta\theta$. От друга страна, същият процес води до факта, че триъгълникът crs става подобен на триъгълника abc . Следователно

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{cr}{cs} = \frac{\Delta T}{L\Delta\theta} \\ \frac{cr}{cs} = \frac{L}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta\theta} = \frac{dT}{d\theta} = L^2 = 1 + T^2. \quad (7)$$

Последното равенство вдясно следва от теоремата на Питагор.

(2) Лесно може да се покаже с помощта на подобен чертеж, че

$$\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta \quad \text{и} \quad \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta.$$

Разбира се, трябва да се разгледа триъгълник с хипотенуза = 1. Това би било чудесно упражнение за читателя.

ЗАЩО КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА

Както видяхме [1], движението в централно поле се извършва в равнина, перпендикулярна на момента на импулса $\vec{L}$. Това естествено ни провокира да използваме комплексни числа. На всеки двумерен вектор $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ може да съпоставим комплексно число $V = v_x + iv_y$, съответстващо на върха на вектора $\vec{v}$. Тук $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ са базисните вектори, а i е имагинерната единица ($i^2 = -1$). Едно от предимствата на комплексното смятане е заместването на векторните произведения с алгебрични, както следва:

- $\vec{a} \cdot \vec{c} \mapsto \text{Re}(AC^*),$
където C^* е комплексно спрегнато на C ;
- $|\vec{a} \times \vec{c}| \mapsto \text{Im}(A^*C),$
където A^* е комплексно спрегнато на A ;
- $\vec{a} \times \vec{L} \mapsto -iAl,$
където $\vec{L}$ е перпендикулярен на комплексната равнина, а с $l = |\vec{L}|$ е означена големината му.

Последната релация отразява факта, че векторното умножение с вектор, перпендикулярен на комплексната равнина, води до завъртане на вектора на ъгъл $\pi/2$, като го оставя в равнината.

Сега доказателството на Първия закон на Кеплер е повече от елегантно. Векторът на Лаплас (вж. [1]) се представя като

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - km\vec{r}/r \mapsto A = -(iPl + kmR_0). \quad (8)$$

Тук A и P са комплексни числа, представящи съответно вектора на Лаплас и импулса на частицата, а R_0 е комплексна единица, съответстваща на $\vec{r}/r$ ($R_0 = e^{i\varphi}$).

Диференцираме (8) по времето

$$-\frac{dA}{dt} = il\frac{dP}{dt} + ikmR_0\frac{d\varphi}{dt} = -ilR_0k/r^2 + ikmR_0l/(mr^2) = 0, \quad (9)$$

защото:

$$\begin{aligned} \frac{dR_0}{dt} &= iR_0\frac{d\varphi}{dt} & (R_0 = e^{i\varphi}); \\ \frac{dP}{dt} &= -kR_0/r^2 & (\text{закон на Нютон}); \\ l &= mr^2\frac{d\varphi}{dt} & (\text{закон за площната скорост}). \end{aligned}$$

Следователно

$$A = \text{const}. \quad (10)$$

Траекторията в полярни координати е проекцията на радиус-вектора $\vec{r}$ върху който да е постоянен вектор. Векторът на Лаплас е подходящ кандидат. Ако изберем оста Ox да съвпада с направлението на $\vec{A}$, получаваме

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{R} &= |\vec{A}|r \cos \theta = -\text{Re}(iPlR^* + kmR_0R^*) \\ &= -l\text{Re}(iPR^*) - kmr = l^2 - kmr \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Rightarrow r = \frac{l^2/km}{1 + \frac{|\vec{A}|}{km} \cos \theta}, \quad (12)$$

тъй като $l = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| \mapsto \text{Im}(R^*P)$ и $\text{Re}(iV) = -\text{Im}(V)$.

Равенството (12) е уравнение на елипса в полярни координати (r, θ) с параметър l^2/km и ексцентритет $|\vec{A}|/km$.

Отново демонстрация на мощта на алгебричните методи – на практика се решават само две алгебрични уравнения.

ЗАКОНИТЕ НА ХУК И НЮТОН СА ДУАЛНИ

Работата с комплексни числа ни позволява лесно да разкрием връзката между двете главни задачи на класическата теоретична механика – движение под действие на: (а) Нютонова сила; и (б) силата на еластичност. Това са и единствените точно решавани задачи и затова имат специално значение в обучението по физика.

Това, че между законите $F \sim -1/r^2$ и $F \sim -\kappa r$ има връзка, се е подозирирало още от времето на тяхното откриване². Достатъчно е да си спомним за идеалната совалка, движеща се по тунел през центъра на Земята, свързващ две диаметрално противоположни точки от земната повърхност. В училище ни учат също, че орбитата на топче, завързано за пружина, е елипса, в чийто център се намира неподвижният край на пружината. Разликата със закона на Кеплер се състои в това, че Слънцето е в един от фокусите на планетната орбита.

Наистина двата закона за центростремително привличане са дуални. Тук под дуални се разбира, че съществува комплексно преобразование от типа $z \rightarrow z^\alpha$, при което траекториите се трансформират една в друга. В началото на 20-ти век финландският математик Карл Сундман, изследвайки сингулярността на траекториите за $z = 0$, (пре)откри, че картата $z \mapsto z^2$ изобразява орбитите, следващи закона на Нютон

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -C_N \frac{z}{|z|^3} \quad (13)$$

в орбити, подчиняващи се на закона на Хук

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -C_H w. \quad (14)$$

Тук $z(t)$ е комплексна функция, описваща траекторията на частицата, движеща се в комплексната равнина под действието на съответната централна сила. Сундман забелязал, че особените орбити, т.е. онези, при които планетата се движи право към Слънцето, съответстват на образите на линии, които в резултат на трансформацията $z \mapsto z^2$ минават през началото (центъра на коничното сечение).

Една важна особеност, когато се прави преобразование на функции, е изборът на параметризация, т.е. наличието на допълнително условие обикновено променя еволюционния параметър. За централни полета това е законът за постоянната площна скорост (вторият закон на Кеплер). С други думи, ако $w = w(t)$, то $z = w^2$ трябва да е функция на друго “време” $\tau = \tau(t)$ – такова, че

$$\frac{dA_w}{d\tau} = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{dA_z}{d\tau} = \text{const}^*, \quad (15)$$

където A_w и A_z са площите, които се “омитат” при съответното движение. Нека $w(t) = re^{\varphi}$ е решение на уравнението на Хук и $z(\tau) = w^2(t) =$

²Нютон отделя много място в *Principia* за анализа на т.нар. трансмутация на силите.

$r^2 e^{2\varphi}$ е неговият образ в момент $\tau = \tau(t)$. Елементарните площи, които тези криви покриват са:

$$w : dA_w(t) = d(r^2 \varphi / 2) \quad z : dA_z(\tau) = d(r^4 \varphi). \quad (16)$$

Формалното делене на двете дефиниционни равенства в (15) дават:

$$\text{const} = \frac{\frac{d}{dt} r^2 \varphi / 2}{\frac{d}{d\tau} r^4 \varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\tau}{dt} \frac{1}{|w|^2}, \quad (17)$$

тъй като $r^2 = |w|^2$. Следователно $\frac{d\tau}{dt} \sim |w|^2$. Без да нарушаваме общността на извода, може да приемем, че $\frac{d\tau}{dt} = |w|^2$.

Сега може да изкажем следната теорема [4]: *Нека траекторията на частица, следваща закона на Хук $w'' = -C_H w$, в комплексната равнина е $w(t)$. Тогава частицата, движеща се по траектория $z(\tau(t)) = [w(t)]^2$, където $d\tau/dt = |w|^2$, се движи съгласно с гравитационния закон на Нютон.*

Доказателство: Тъй като $\frac{dz}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{|w|^2} \frac{dw^2}{dt}$, то

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\tau^2} &= \frac{2}{ww^*} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{w^*} \frac{dw}{dt} \right) \\ &= \frac{2}{ww^*} \left(-\frac{1}{(w^*)^2} \frac{dw^*}{dt} \frac{dw}{dt} + \frac{1}{w^*} \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \\ &= -\frac{2}{w(w^*)^3} \left(\left| \frac{dw}{dt} \right|^2 + C_H |w|^2 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Последното равенство се получава, като се замени втората производна на w с $-C_H w$ (закон на Хук).

Лесно се проверява, че величината

$$E_o = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{dw}{dt} \right|^2 + C_H |w|^2 \right)$$

е постоянна във времето. Читателят ще я припознае като енергия на осцилатора, описван с уравнението на Хук. Сега уравнение (18) приема вида

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -4E_o \frac{w^2}{w^3(w^*)^3} = -C_N \frac{z}{|z|^3}. \quad (19)$$

Теоремата е доказана.

Струва си да отбележим, че естественото обобщение на комплексните променливи са познатите от курсовете по теоретична физика, разглеждащи спинори.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Откриването на симетриите в дадена динамична система е ключът за осмисляне на поведението ѝ. Теоремата на Ньотер ни казва, че на всеки закон за запазване съответства определена симетрия. Например за разглежданата задача системата е симетрична по отношение на: времето (енергията се запазва); въртене спрямо ос (моментът на импулса се запазва); и въртене в 4-мерно пространство (векторът на Лаплас се запазва). Именно последната “скрита” симетрия ни позволява да получим решения на задачата на Кеплер, които са не само елегантни, но и достъпни за бакалаври, а и за ученици с подчертан интерес към физиката. Нещо повече, описаните тук подходи откриват път към различни физични модели и математични методи, а използването им в преподавателската практика ще демонстрира силата на съвременния прочит на механиката.

Литература

- [1] Иля Петров: *Физика: Методология на обучението* **1/2** (2016) 3-13.
- [2] С.Е. Aguiar, М.Ф. Barroso: *Am. J. Phys.* **64** (1996) 1042-1048.
- [3] Т. Takehara: *Mem. Fac. Sci., Shimane Univ.* **16** (1982) 53-60.
- [4] R.W. Hall, K. Josić: *SIAM Revue* **42** (2000) 115-124.