Физика: Методология на обучението **6** (2018) 243–253

Измерване на заряда на електрона чрез шумове на Шотки

Виктор ДАНЧЕВ, Господин КАРАИВАНОВ

Абстракт. В този протокол е описана експериментална постановка за измерване на заряда на електрона и резултатите, получени от нея. Постановката се калибрира чрез топлинните шумове на Джонсън–Найкуист, като в процеса се определя константата на Болцман. Експериментът не изисква специализирано обурудване и може да бъде лесно възпроизведен от студенти и ученици. Дизайнът на постановката е разработен от проф. Тодор Мишонов и Алберт Варонов, а конкретната реализация е построена от авторите в рамките на месец.

1 Увод

Този протокол и проведеният към него експеримент частично удовлетворяват изпитните изисквания на курса по Статистическа Физика във Физически Факултет към Софийски Университет "Св. Климент Охридски". Работата е организирана както следва:

1. Теоретична част – шум на стрелбата 2: излагане на формулите на Шотки и Джонсон-Найкуист, които се явяват основата на измерванията по-долу.
2. Експериментална част – постановка и измервания 3: разглеждане на конкретната експериментална постановка и извеждане на зависимостите между измерваните величини посредством формули от теоретичната част.
3. Верификация и калибровка на експерименталната установка 4: обобщаване на резултатите при измерване на константата на Болцман и калибровката на постановката.
4. Резултати 5: обработка на получените експериментални резултати и намиране на стойности за заряда на електрона посредством тях.
5. Дискусия и Заключение 6: обобщаване на резултатите и кратка дискусия върху възможните източници на грешки и приложения на установката.

2 Теоретична част – шум на стрелбата

Нека да разгледаме фототок, протичащ през един фотодиод в следствие на облъчването му с некохерентна светлина. Известно е, че спектралната плътност на сигнал, произлизащ от на такъв фототок, е свързана със средната стойност на квадрата му посредством формулата на Шотки (за методичен извод виж например [2])

$$(I^2)_f = 2q_e\langle I\rangle. \tag{1}$$

Тази спектрална плътност не зависи от честотата в първо приближение и отговаря на бял шум. В такъв случай за пълната амплитуда на шума трябва просто да умножим двете страни по честотната лента (отговарящо на интегриране на константна функция). При наличие на резистор, през който протича фототокът, законът на Ом е валиден за честотните амплитуди, както и за спектралните плътности

$$U_\omega = RI_\omega, \tag{2}$$

$$(U^2)_f = R^2(I^2)_f. \tag{3}$$

В такъв случай, за спектралната плътност на шума изразен чрез напрежението, следва равенството

$$(U^2)_f = 2q_eR\langle U\rangle, \tag{4}$$

което е централната формула, която ще използваме за определяне на заряда на електрона.

Формулата на Джонсън–Найкуист свързва термалния шум в резистор с неговото съпротивление чрез константата на Болцман [1], [3]

$$(U^2)_f = 4k_\mathrm{B}TR, \tag{5}$$

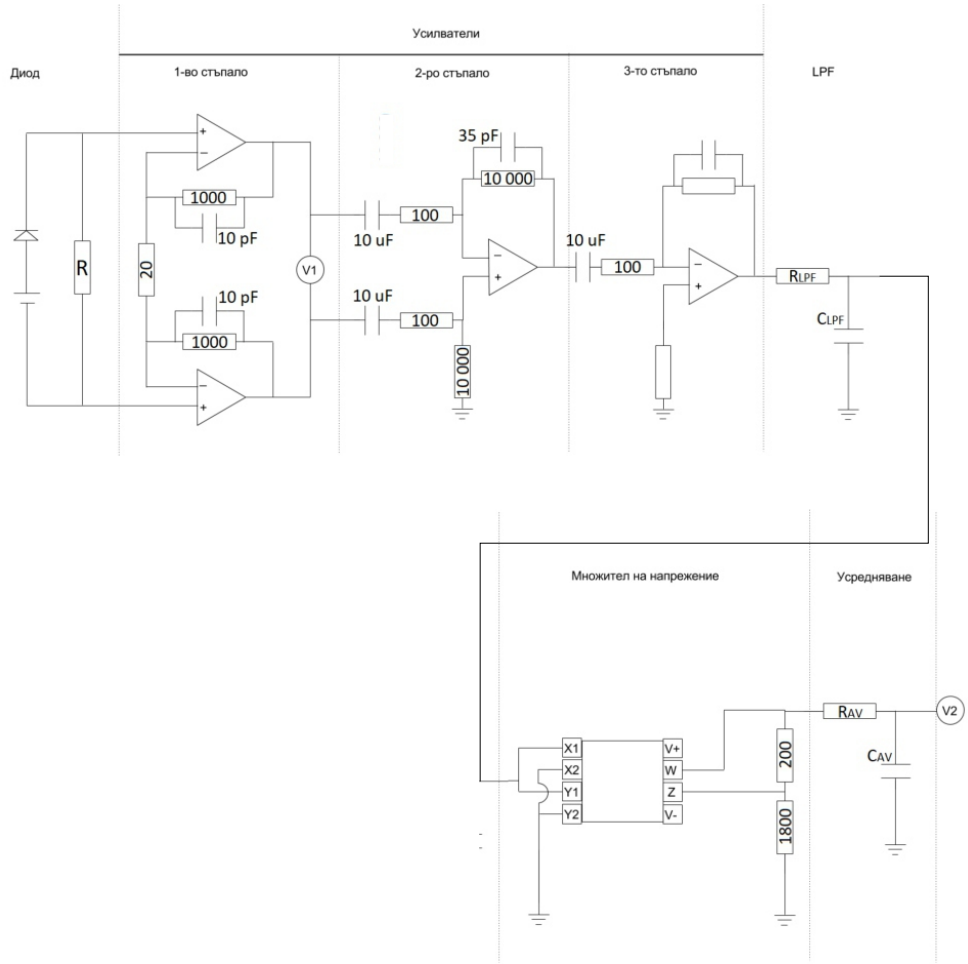
където T е абсолютната температура в келвини, а R е съпротивлението на въпросния резистор.

При включване на различни съпротивления от дясната страна на уравнението, може да се измери константата на Болцман, което дава критерии за правилната работа на установката.

3 Експериментална част – постановка и измервания

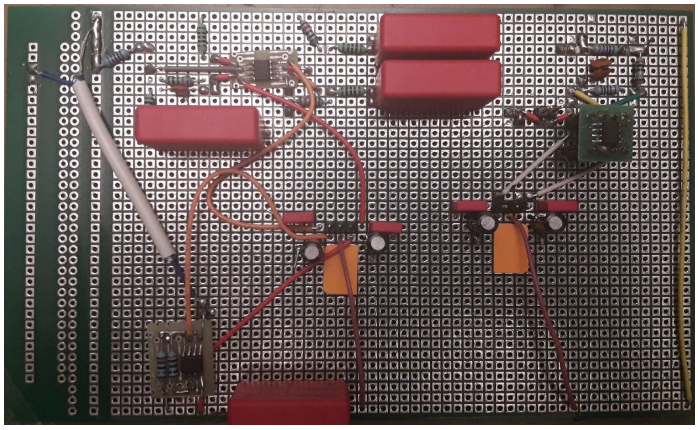
Измерванията правим с помощта на нискошумни операционни усилватели ADA4898 [4], които ще ни позволят да засечем шума на стрелбата от фотодиод. Най-общо постановката се състои от 5 стъпала, както следва:

1. Фотодиод BPW34 [6], захранван от 3-волтова батерия. Осветява се с некохерентна светлина (за да гарантираме липса на корелация при фотонните удари, а от там и големина q_e на делта-функциите в анализа ни). Към фотодиода е свързан резистор, през който преминава фототока (това е резисторът R от (4)). Падът на напрежението на двата края на този резистор ще бъде усилен от следващите стъпала.



Фиг. 1. Схематичен чертеж на постановката (всички съпротивления са дадени в мерни единици $[\Omega]$).

2. Усилваща част. Състои се от 3 подстъпала с общо усилване около 10^6 пъти:
   (а) неинвентиращ усилвател с усилване около $Y_1 = 101$ пъти, използващ два ADA4898 [4] в конфигурация “буфер”. Нашата конкретна реализация използва един ADA4898-2. След него се измерва напрежението $\langle U \rangle$, тъй като веднага след това отрязваме DC съставящата с кондензаторите (поради многото шум);
   (б) усилвател 2 – диференциращ усилвател с усилване около $Y_2 = 100$ пъти, използващ един ADA4898 [4];
   (в) усилвател 3 – инвертиращ усилвател с усилване около $Y_3 = 100$ пъти, използващ един ADA4898 [4].
3. Ниско-честотен филтър с време-константа $\tau = R_{\text{LPF}} C_{\text{LPF}} \cong 2.5 \times 10^{-5}$ s, съответстваща на ъглова честота $\omega = \tau^{-1}$. Този филтър ни дава честотната лента в първо приближение $B = 1/4R_{\text{LPF}}C_{\text{LPF}}$.
4. Умножаваща верига – използва множител AD633 [5], като на двата входа се подава усиленото напрежение, за да получим U^2 на изхода след съобразен делител на напрежение. Изследваме допълнително зависимостта $U_{\text{in}}^2 = ZU_{\text{out}}$, където Z е константа от порядък единица и дава корекция за ефекта от влиянието на измервателния уред и несъвършенства при избора на съпротивления към делителя на множителя.
5. Осредняващ филтър – ниско-честотен филтър с времеконстанта $\tau_{\text{AV}} \gg \tau_{\text{LPF}}$ ($\tau_{\text{AV}} \cong 15$ s), подсигуряващ валидността на прехода направен по-горе $T \to \infty$ и така ни дава стойност за $\langle U^2 \rangle$



Фиг. 2. Снимка на установката.

Измерванията се състоят в намиране на зависимост между $\langle U \rangle$ и $\langle U^2 \rangle$ чрез различна осветеност на фотодиода (различно разстояние между него и осветяващото го тяло). От измерените данни можем да построим правата, съответстваща на уравнение (4), след като отчетем усилванията и елементите във веригата. Нека означим с индекс m измерените величини и да ги свържем с тези във формулата. Първо, тъй като (4) е уравнение за честотна плътност, а ние измерваме напрежението $\langle U^2 \rangle$, което вече е проинтегрирано по честотите, в сила е равенството

$$(U^2)_f B = \langle U^2 \rangle. \tag{6}$$

Освен това, измереното от нас напрежение е усилено $Y^2 = (Y_1 Y_2 Y_3)^2 = (1.01 \times 10^6)^2$ пъти, което означава, че трябва да разделим измереното с тази стойност. Ако отчетем коефициента Z от множителя и измервателния уред, получаваме

$$(U^2)_f = \frac{\langle U_m^2 \rangle}{Y^2 B z} \tag{7}$$

за връзката между измереното напрежение и честотната плътност на шума. По подобен начин, $\langle U \rangle$ е усилено $Y_1 = 101$ пъти, така че

$$\langle U \rangle = \frac{\langle U_m \rangle}{Y_1}. \tag{8}$$

Използвайки изразите (7) и (8) в изведената формула (4), получаваме връзката

$$\langle U_m^2 \rangle = 2 \frac{Y^2}{Y_1} Z q_e B R \langle U_m \rangle \tag{9}$$

за измерените напрежения. По-точно можем да получим честотната лента, ако приемем уравнението $B^{-1} = 4 R_{\text{RPF}} C_{\text{RPF}}$ като нулева поправка, валидна при ниски честоти, и използваме формулата за честотната зависимост на усилването на операционен усилвател, за да намерим малката корекция от 1-ви ред. Тази корекция ни дава по-ниска стойност за B с около $3,8\%$ в нашия случай (според независимо пресмятане от програма, написана от авторите). След по-точно измерване на R_{RPF} и C_{RPF} и отчитане на тази корекция за честотната лента получаваме $B \cong 10.02 \times 10^3$ Hz. Тогава експериментът се състои в това да измерим наклона на правата, получена от $\langle U_m^2 \rangle$ и $\langle U_m \rangle$, който ще бележим с α ($\langle U_m^2 \rangle = \alpha \langle U_m \rangle + C$) и коефициента Z от фотомножителя (в същия обхват). След получаването на стойности за Z и α можем да пресметнем заряда на електрона от

$$q_e = \frac{Y_1 \alpha}{2 Y^2 z B R}, \tag{10}$$

като използваме модифицираната честотна лента в (9).

4 Верификация и калибровка на експерименталната установка

Преди да използваме постановката за измерването на заряда на електрона, верифицираме правилната работа на всички компоненти чрез измерване на константата на Болцман от уравнение 5 и извършваме калибровка, в която да отчетем вътрешното съпротивление на измервателния уред като допълнителен делител за множителя. Отново умножавайки по честотната лента и отчитайки усилването, получаваме за константата на Болцман. Резултатите в Табл. 1 са измервания на изходното напрежение $\langle U_m^2 \rangle$ при различни съпротивления на входа на постановката при стайна температура (около 300 K).

$$k_{\text{B}} = \frac{1}{4Y^2BT}\frac{\Delta\langle U_m^2\rangle}{\Delta R}. \tag{11}$$

Табл. 1. Измервания на изходното напрежение $\langle U_m^2 \rangle$ при различни входни съпротивления.

R [Ω]	$\langle U_m^2 \rangle$ [V]	R [Ω]	$\langle U_m^2 \rangle$ [V]	R [Ω]	$\langle U_m^2 \rangle$ [V]
82 ± 1	0.015 ± 0.001	750 ± 1	0.067 ± 0.001	910 ± 1	0.082 ± 0.001
298 ± 1	0.030 ± 0.001	820 ± 1	0.074 ± 0.001	1000 ± 1	0.091 ± 0.001
470 ± 1	0.044 ± 0.001				

Използвайки наклона на правата от тази зависимост, получен по метода на най-малките квадрати (Фиг. 3), във формула (11), получаваме

$$k_{\text{Bm}} \cong 6.7 \times 10^{-24} = 0.67 \times 10^{-23} \text{ [J/K]}.$$

Получената стойност е около два пъти по-малка от истинската $k_{\text{B}} \cong 1.38 \times 10^{-23}$ [J/K], но линейната зависимост е очевидна и това ни показва, че установката работи правилно. Грешката от около 50% (57% при отчитане на Z по-долу) най-вероятно се дължи на допълнителни шумове поради не-идеалните спойки и начин на изготвяне на установката, както и липсата на екраниране, които не можем да отчетем толкова лесно.

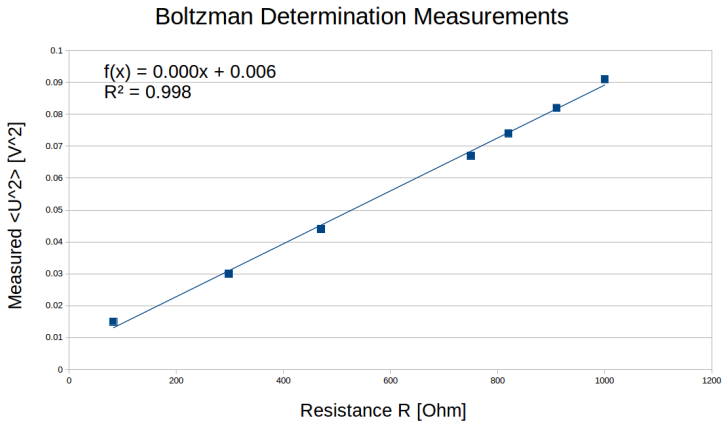
Нека сега разгледаме зависимостта U_{out} от U_{in}^2 за множителя на напрежение, построена при използването на същия измервателен уред в същия обхват на измерване, за да можем да намерим Z от (10). Измерените данни са дадени в Табл. 2.

Линейната зависимост отново е очевидна и коефициентът на линейност е приблизително $Z \cong 1.126$ (Фиг. 4). Този коефициент ще използваме в следващата секция, когато пресмятаме заряда на електрона, тъй

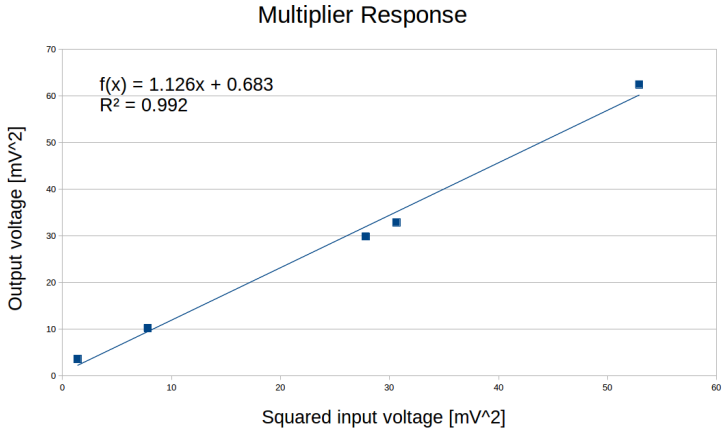
Табл. 2. Измерване на изходното напрежение $\langle U_{out} \rangle$ (след умножителя) и квадрата на входното напрежение $\langle U_{in}^2 \rangle$.

U_{in}^2 [(mV)^2]	1.37 ± 0.01	7.81 ± 0.01	30.62 ± 0.01	27.82 ± 0.01	52.90 ± 0.01
U_{out}^2 [(mV)^2]	3.6 ± 0.1	10.2 ± 0.1	32.9 ± 0.1	29.9 ± 0.1	62.5 ± 0.1

като той включва корекцията от вътрешното съпротивление на измервателния уред.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

5 Резултати

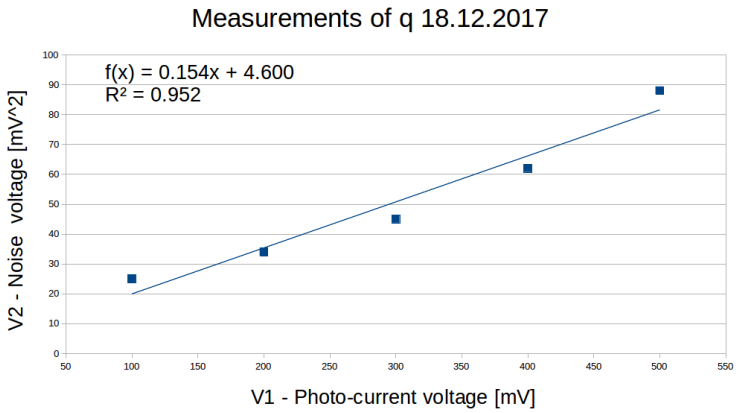
5.1 Измерване на 18.12.2017

При използването на резистор $R = 200\ \Omega$ към фотодиода и използване на бяла LED светлина от телефонно фенерче, която се приближава и отдалечава на ръка към него, за да протича различен фототок, измерваме стойностите, дадени в Табл. 3.

Табл. 3. Измерените експериментални стойности за $\langle U_m \rangle$ и $\langle U_m^2 \rangle$, използвани за определяне на q_e.

$\langle U_m \rangle$ [mV]	100 ± 5	200 ± 5	300 ± 5	400 ± 5	500 ± 5
$\langle U_m^2 \rangle$ [(mV)^2]	25 ± 1	34 ± 1	45 ± 1	62 ± 1	88 ± 1

След прекарване на права по метода на най-малките квадрати (Фиг. 5), за наклона получаваме стойност $\alpha = 0.154 \pm 0.061$ (грешката оценяваме на базата на двете прави, получени, като се пренебрегнат респективно най-лявата и най-дясната точка).



Фиг. 5.

След заместване на α в (10), за заряда на електрона получаваме

$$q_{em} = (3.3 \pm 1.3) \times 10^{-18}\ \text{C}.$$

Стойността е около 10–20 пъти по-голяма от очакваното. Тази разлика може да се дължи на използването на частично кохерентна светлина и/или допълнителни топлинни и измерителни грешки.

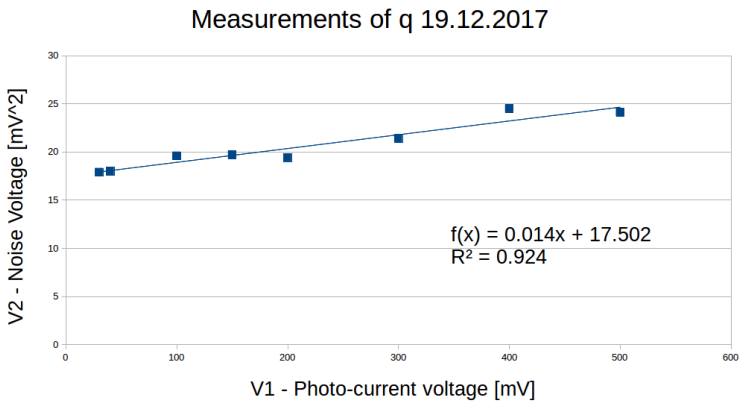
5.2 Измерване на 19.12.2017

Отново използваме същия резистор $R = 200\,\Omega$, но този път за светлинен източник използваме джобно фенерче, с което очакваме грешката от кохерентността да бъде по-малка. При измерванията получаваме стойностите, дадени в Табл. 4.

Табл. 4. Измерените експериментални стойности за $\langle U_m \rangle$ и $\langle U_m^2 \rangle$, използвани за определяне на q_e.

$\langle U_m \rangle$ [mV]	$\langle U_m^2 \rangle$ [(mV)^2]	$\langle U_m \rangle$ [mV]	$\langle U_m^2 \rangle$ [(mV)^2]	$\langle U_m \rangle$ [mV]	$\langle U_m^2 \rangle$ [(mV)^2]
30 ± 5	17.9 ± 0.1	150 ± 5	19.7 ± 0.1	400 ± 5	24.5 ± 0.1
40 ± 5	18.0 ± 0.1	200 ± 5	19.4 ± 0.1	500 ± 5	24.1 ± 0.1
100 ± 5	19.6 ± 0.1	300 ± 5	21.4 ± 0.1		

След прекарване на права по метода на най-малките квадрати (Фиг. 6), за наклона получаваме стойност $\alpha = 0.014 \pm 0.003$ (грешката оценяваме на базата на възможните прави, получени, като се пренебрегнат различни точки).



Фиг. 6.

След заместване на α в (10), за заряда на електрона получаваме

$$q_{em} = (3.0 \pm 0.7) \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

Тази стойност е много по-близка до истинската очаквана, макар все още да е около 2 пъти по-голяма. Възможна причина за подобрението е използването на фенерчето, но без направата на още експерименти не можем да заключим, че това е единствената такава и със сигурност има други случайни фактори и голямо влияние от температурата.

6 Дискусия и заключение

Измерените няколко различни стойности на фундаменталните константи (не само тези включени в този протокол) показват повтаряемост на експеримента и сродни резултати. При всички проведени до момента експерименти от авторите, стойностите са до 1 порярък под или над въпросните константи, което означава, че има силно влияние от случайни фактори. Друга възможна причина за понижена точност е използването на частично кохерентна светлина, както беше пояснено в предишната секция. Най-добър източник на некохерентна светлина би била лампа с нагреваема жичка, но от друга страна, тя нагрява фотодиода, което води до допълнителни неточности при измерването. Светлината от червените и сините диоди проявява частично кохерентни свойства за това използването на луминофор (получаване на бял диод), както в използваното фенерче, спомага за точността. Като бъдещ проект бихме искали да използваме по-добре реализирана установка (вероятно машинно изработена) и да направим по-голяма статистика при различни температури и различни източници на светлина, за да видим евентуална зависимост между тези фактори и точността, с която измерваме. Постановка подобна на описаната е дадена на 6-тата Олимпиада по експериментална физика, описаното там решение [7] може да се разглежда като методично ръководство за работа с тази постановка.

В заключение, смятаме че описаната постановка може да бъде включена в стандартните практикуми на физическите факултети (и дори профилирани гимназии), тъй като е лесна и евтина за изработка, и е поучителна за няколко раздела на физиката както и радиоелектрониката!

Литература

[1] T.M. Mishonov, V.G. Yordanov and A.M. Varonov (2017) Measurement of Electron Charge q_e and Boltzmann's Constant $k_{\text{в}}$ by a Cheap Do-It-Yourself Undergraduate Experiment., arXiv:1703.05224v1.

[2] T.M. Mishonov, E.G. Petkov, N.Zh. Mihailova, A.A. Stefanov, I.M. Dimitrova, V.N. Gourev, N.S. Serafimov, V.I. Danchev and A.M. Varonov (2018) Simple Do-It-Yourself Experimental Set-Up for Electron Charge q_e Measurement. *Eur. J. Phys*. **39**; arXiv:1807.04688.

[3] T.M. Mishonov, V.N. Gourev, I.M. Dimitrova, N.S. Serafimov, A.A. Stefanov, E.G. Petkov and A.M. Varonov (2019) Determination of the Boltzmann Constant by the Equipartition Theorem for Capacitors. *Eur. J. Phys*. **40** 035102; https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab07e0

[4] Analog Devices, ADA4898-1/ADA4898-2 Datasheet, D07037-0-5/15(E).

[5] Analog Devices, AD633 Datasheet, D00786-0-3/15(K).

[6] Vishay Siliconix, BPW34 Datasheet, Document Number 81521.

[7] T.M. Mishonov, E.G. Petkov, A.A. Stefanov, A.P. Petkov, V.I. Danchev, Z.O. Abdrahim, Z.D. Dimitrov, I.M. Dimitrova, R. Popeski-Dimovski, M. Poposka, S. Nikolić, S. Mitić, R. Rosenauer, F. Schwarzfischer, V.N. Gourev, V.G. Yordanov and A.M. Varonov (2019) Measurement of the Electron Charge q_e Using Schottky Noise. Problem of the 6-th Experimental Physics Olympiad. Sofia 8 December 2018", arXiv:1703.05224v2.