

Магическият двоен конус

Иля ПЕТРОВ¹, Тома ТОМОВ²

¹E-mail: heron_press@mail.bg

²Софийски университет Св. Климент Охридски, Физически факултет, София 1164, бул. Джеймс Баучер 5

Абстракт. В работа е обсъдено условието за движение на двоен конус, поставен върху V-образни наклонени релси. Показана е грешката, допусната в някои публикации. Дадена е качествена оценка за движението в критичната точка.

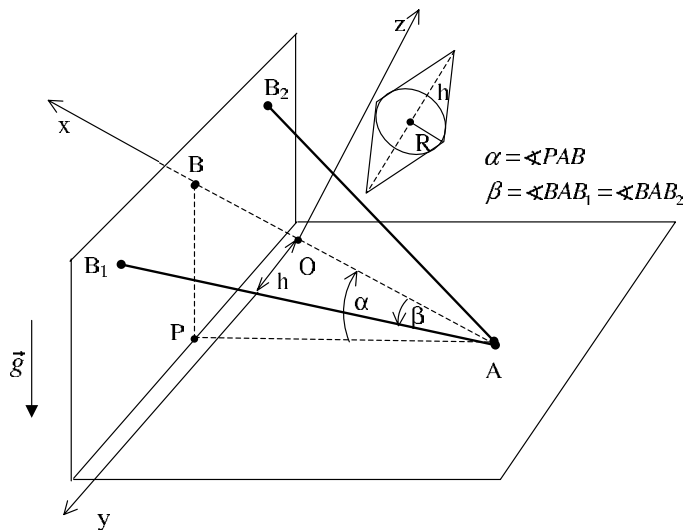
В кабинета за демонстрации към Физическия факултет на Софийския университет се пази странен уред – дървен двоен конус, който **сам** се катери по наклонени релси във формата на буквата ‘V’, напук на “здравия разум” (вж. Фиг. 1).



Фиг. 1. Внимание: За да видите анимацията, трябва да свалите файла на компютър.

Тайната на фокуса, който е на повече от 300 години¹, както ми обясни демонстраторът, се крие в това, че докато се движи нагоре, разстоянието между релсите се увеличава и центърът на масата на двойния конус **слиза** спрямо хоризонталната повърхност. Парадокс няма и законът за запазване на енергията не се нарушава (При “видимото” движение като че ли нараства и кинитичната, и потенциалната енергия на тялото.). Повторихме опита, но с релси, които са успоредни. Сега поведението на двойния конус бе точно като на тяло, търкалящо се надолу по наклонена равнина. Очевидно трикът е свързан със специфичната форма на тялото и геометрията на опорните релси.

Най-елегантното решение (с малка, вероятно печатна, грешка) е дадено в работата на Бартош и Мусилова [1]. Избираме началото на координатната система т. О да съвпада с положението на центъра на масата на двойния конус в момента, когато върховете му лежат точно на релсите (вж. Фиг. 2).



Фиг. 2. Избор на координатна система. Обърнете внимание, че ъгълът α , който определя наклона на равнината на релсите, е също така най-малкият ъгъл, под който се вижда центърът на масата на двойния конус от началото (върха) на релсите т. А.

¹В 1694 г. излиза от печат книгата *Pleasure with Profit* (Удоволствие, носещо печалба) на Уилям Лейборн, в която на 12-та и 13-та страница е публикувано описанието на предложено от Е.Р. “магическо” устройство, станало известно като “катерещо се вретено”.

Уравнението на коничната повърхност е

$$\frac{R}{h}(y-h)^2 = (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2, \quad (1)$$

където R и h са съответно радиусът и височината на конуса, който се търкаля по релсата AB_1 , а центърът на масата на двойния конус има координати $(\xi, 0, \zeta)$. Като отчетем, че уравнението на релсата AB_1 е

$$AB_1: y = h + x \tan \beta, \quad z = 0, \quad (2)$$

и го заместим в (1), получаваме квадратно уравнение за x

$$x^2(1 - \tan^2 \psi \tan^2 \beta) - 2x\xi + (\xi^2 + \zeta^2) = 0, \quad (3)$$

където $\tan \psi = R/h$.

Релсата AB_1 е допирателна към коничната повърхност, което алгебрично означава, че за x има само едно решение, т.е. дискриминантата на квадратното уравнение е равна на нула:

$$\zeta^2 = \frac{\tan^2 \psi \tan^2 \beta}{1 - \tan^2 \psi \tan^2 \beta} \xi^2 \Rightarrow \zeta = -\xi \tan \theta = -\frac{\tan \psi \tan \beta}{\sqrt{1 - \tan^2 \psi \tan^2 \beta}} \xi, \quad (4)$$

т.е. центърът на масата се движи по права линия, сключваща ъгъл ψ с оста Ox . Знакът ‘-’ отговаря на движение върху релсите, тъй като по построение $\xi \leq 0$ (знакът ‘+’ отговаря на движение под релсите).

С други думи, докато двойният конус се “изкачва”, центърът на масата му слиза, ако

$$1 - \tan^2 \psi \tan^2 \beta > 0$$

$$\tan \alpha < \frac{\tan \psi \tan \beta}{\sqrt{1 - \tan^2 \psi \tan^2 \beta}}. \quad (5)$$

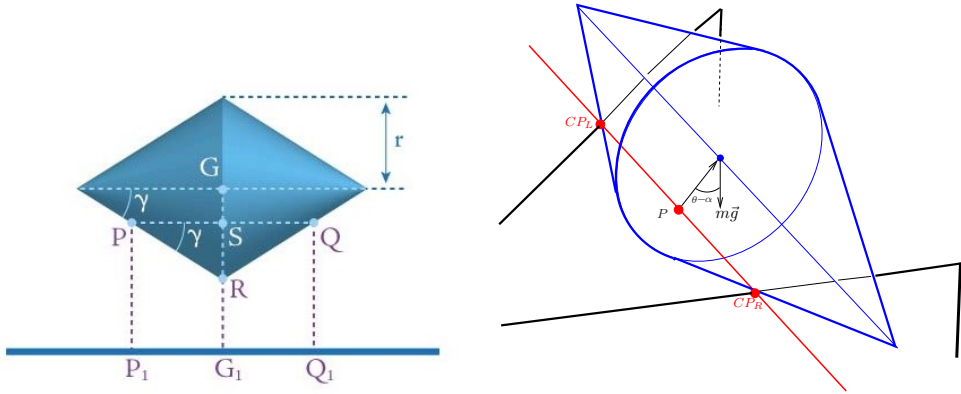
Второто неравенство идва от явното изискване $\alpha < \theta$.

Параметрите на установка от Физическия факултет са: $\tan \alpha \approx 2/37$, $\psi = \beta \approx 21^\circ$, които удовлетворяват със запас условието (5).

* * *

Бяхме силно изненадани, когато открихме, че в същото списание седем години по-късно е “изведено” друго, по-просто условие [2]

$$\tan \alpha < \tan \psi \tan \beta. \quad (6)$$



Фиг. 3.

Доколкото ъглите, участващи в неравенствата, са малки, то разликата между двете формули (5) и (6) е малка (от трети порядък) и трудно се установява експериментално. Грешката у авторите (да не говорим за рецензентите), която се среща и в широко разпространената монография на Джулиан Хавил [3] идва от погрешното проектиране на центъра на масата и допирните с релсите точки на двойния конус. На Фиг. 3 вляво е показана проекцията, използвана в [2,3], при която центъра на масата и допирните точки лежат във вертикалната равнина. Вдясно стои коректната схема (взета е от работата на Зоханг Ганди и Костас Ефтимииу [4]).

Остава въпросът, какво се е случило със списанието за тези шест-седем години (работите [1] и [4] са публикувани през 2004, 2005 г., докато [2] и [3] са от 2010, 2011 г.)? Най-вероятно и то следва тенденцията за експоненциално нарастване на грешните, но положително рецензирани статии. Наистина последните изследвания показват, че около 80% от публикуваните нови работи съдържат грешни резултати. Тази тенденция обаче води до намаляване на авторитета на науката, а оттам и всички негативи, свързани с разширяването на псевдопознанието.

* * *

Любопитният въпрос е какво ще стане, ако дължината на релсите е голяма. Ще падне ли двойният конус, ще осцилира ли на определена височина, или безкрайно ще се върти точно на ръба на падане?

На помощ идва анализът, основаващ се на закона за запазване на енергията

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgH = \text{const}, \quad (7)$$

където $J = (3/5)mR^2$ е инерчният момент на двойният конус, H е височината на центъра на масата на двойния конус, измервана от т. O на Фиг. 2, т.е. потенциалната енергия е нула при $H = 0$, и g е земното ускорение. Динамичната картина на процеса е преобразуване на въртелигото в транслационно движение под действието на силата на тежестта и идеално триене, което да осигурява въртене без хлъзгане. Ако изберем в началния момент $t = 0$ скоростта $v(0) = 0$, то $\omega(0) = 0$ и

$$H(0) = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Това е и обичайният случай – демонстраторът поставя двойния конус в близост до върха на релсите. В критичното състояние, когато върховете на двойния конус опират релсите, за тяхното транслационно движение може да приложим закона за нулевата скорост на преместване на точката на допиране на въртящ се без хлъзгане цилиндър, т.е. $v_f = 0$. За критичното състояние имаме

$$\frac{1}{2}J\omega_f^2 = \text{const}, \quad (9)$$

тъй като $H_f = 0$ също. Сравнявайки двата израза (8) и (9), получаваме

$$mgH(0) = \frac{1}{2}J\omega_f^2 = \text{const} \Rightarrow \omega_f > 0. \quad (10)$$

С други думи, крайното състояние е чисто въртене с постоянна ъглова скорост. Раазбира се, експериментално това състояние не може да се постигне. Обикновено се нарушава условието за въртене без хлъзгане и двойният конусът пада.

Литература

- [1] J. Bartoš, J. Musilová (2004) Small surprises in ‘rolling-physics’ experiments. *Eur. J. Phys.* **25** 675–687.
- [2] E. Cortés, D. Cortés-Poza (2011) Mechanical paradox: the uphill roller. *Eur. J. Phys.* **32** 1559–1576.
- [3] J. Havil (2010) *Nonplussed: Mathematical Proof of Implausible Ideas*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [4] S.C. Gandhi, C.J. Efthimiou (2005) The Ascending double cone: a closer look at a familiar demonstration. *Eur. J. Phys.* **26** 681–694.