Физика: Методология на обучението **8** (2020) 75–79

Защо силата е векторна величина

Иля ПЕТРОВ
E-mail: heron_press@mail.bg

Абстракт. Силата е вектор, защото резултантната сила на две едновременно действащи, приложени в една и съща точка, сили се получава по правилото на успоредника. В работата са обсъдени изводът, основаващ се на определението за механична (динамична) сила, както и доказателството на Поасон, валидно и при статични условия.

В съвременните учебници[1] се декларира, че "физичните величини, които имат големина и посока, са векторни". Какво да кажем тогава за електричния ток, който отговаря на посочените изисквания, но не е векторна величина. Една работна дефиниция е: *векторните величини се събират по правилото на успоредника*, т.е. резултантната съвпада с диагонала на успоредник, чиито съседни страни са събираемите величини, а посоката се дава от далечния връх на успоредника. Пример за подобно събиране е сумата на две скорости – резултат, известен още на древните гърци (поне Аристотел го споменава). Вариант на правилото на успоредника е описано още през 1586 г. от Симон Стевийн[2]. Изглежда, че по времето, когато от печат излиза Нютоновата "Principia", разлагането на сили с помощта на правилото на успоредника е общоприето[3] и не е случайно, че силата, дефинирана от втория закон на Нютон, го изпълнява.

Наистина масата е мащабен коефициент; силата е пропорционална на ускорението, което е векторна величина ($\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$), и следователно силата също е векторна величина. Нещата изглеждат тривиални, но

[1] Според МОН, за да научи, че силата е векторна величина, българският ученик трябва да е навършил поне 18 години! Струва си да си припомним, че невръстните поробени българчета са изучавали разлагане на сили в училищата на Османската империя (вж. първия учебник по физика на български език от Найден Геров).

[2] Значението на книгата на Стевийн е резюмирано в Encyclopædia Britannica: В "De Beghinselen der Weeghconst" (Статика и хидростатика) Стевийн публикува теоремата за триъгълника сили. Тази теорема, която е еквивалентна на правилото на успоредника, дава нов тласък в изследванията по статика, основаващи се дотогава на теорията на лоста... [1]

[3] В 1687 г. (годината, в която излиза "The Principia: Mechanical Principles of Natural Philosophy") Бертран Леми публикува теорема за трите компланарни, уравновесяващи се сили.

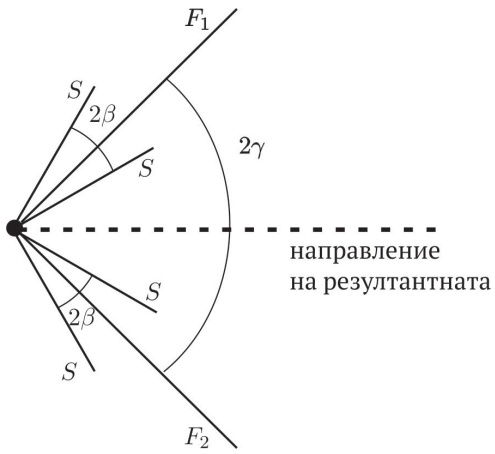
има едно НО! Дефиницията на Нютон се отнася за причината за движение, т.е. тя е динамична и не може да обясни механичното равновесие. А именно в статиката се използва съществено векторният характер на силата и съответното ѝ разлагане по правилото на успоредника. В продължение на около двеста години, през които всичко във физиката се обяснява със сили, този проблем заема централно място във философията на науката.

По-долу следват аргументите на Поасон [2], които според Максуел са валидни "за всяка композиция от величини, които променат знака си, когато се завъртят на 180 градуса" [3].

Главната, ключовата, стъпка в анализа на Поасон е обяснението, защо правилото на успоредника е вярно, когато разглеждаме две равни по големина сили, $F_1 = F_2 = F$, които сключват ъгъл 2γ помежду си. Обяснението започва с предпоставката, че резултантната сила R е компланарна с F_1 и F_2 (общото начало и върховете на силите дефинират равнина, т.е. F_1 и F_2 зависят само от две пространствени променливи; следователно и резултантната е функция на същите променливи) и е насочена по углополовящата на ъгъла 2γ, тъй като R не се променя при размяна на силите. С други думи, големината на R трябва да е функция на F и γ. Тъй като $R = f(F, \gamma)$ не бива да зависи от избора на мерните единици, имаме:

$$f(F, \gamma) = F^{\alpha} g(\gamma)\,, \tag{1}$$

където α е безразмерно число, а $g(\gamma)$ е произволна безразмерна фунция. Доколкото R има размерност на сила, то $\alpha = 1$, или $R = Fg(\gamma)$ и задачата



Фиг. 1. Обяснението на Поасон за две равни по големина сили.

се свежда до доказване, че $g(\gamma)$ има вид, удовлетворяващ правилото на успоредника.

Да представим F_1 като резултантна на две други сили S, сключващи ъгъл 2β (Фиг. 1),

$$\left.\begin{array}{l} F = Sg(\beta) \\ R = Fg(\gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow R = Sf(\beta)g(\gamma)\,. \tag{2}$$

Аналогично F_2 е резултантна на същата двойка сили, но завъртяна на ъгъл 2γ. С други думи, резултантната сила R се получава от четирите сили S. От своя стрна, двете вътрешни сили S пораждат сила, която е насочена по ъглополвящата на ъгъла $2(\gamma - \beta)$, т.е. съвпада по посока с R и има големина $Sg(\gamma - \beta)$. Резултантната на двете външни сили S има същата посока (ъглополовящите на ъглите $2(\gamma - \beta)$ и $2(\gamma + \beta)$ съвпадат), но големината ѝ е $Sg(\gamma + \beta)$. Следователно големината на силата R се дава с тяхната аритметична сума. Тъй като $R = Sg(\gamma)g(\beta)$, имаме:

$$Sg(\gamma)g(\beta) = Sg(\gamma - \beta) + Sg(\gamma + \beta) \tag{3}$$

или

$$g(\gamma)g(\beta) = g(\gamma - \beta) + g(\gamma + \beta)\,. \tag{4}$$

Решението на това функционално уравнение е

$$g(\gamma) = 2\cos(\kappa\gamma)\,, \tag{5}$$

за произволно κ. Следователно

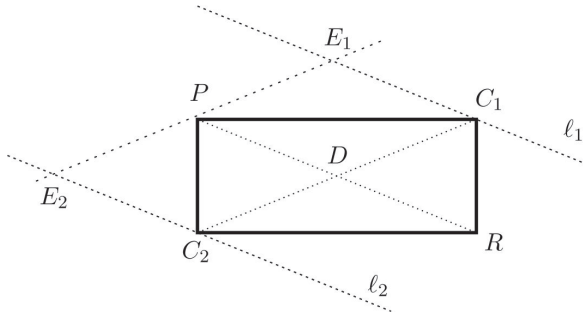
$$R = Fg(\gamma) = 2F\cos(\kappa\gamma)\,. \tag{6}$$

От израза (6) следва, че, когато $\gamma = \pi/2$, $R = 0$ за нечетни κ. Единствената допустима стойност на κ е 1, тъй като всички други стойности водят до противоречие с условието, че две сили се уравновесяват само и единствено, когато са с противоположни посоки. Наистина, ако $\kappa = 2n + 1$ $n = 1, 2, ...$, се получава, че $R = 0$ и при ъгъл $\pi/(4n + 2)$). Окончателно имаме

$$R = 2F\cos(\gamma)\,. \tag{7}$$

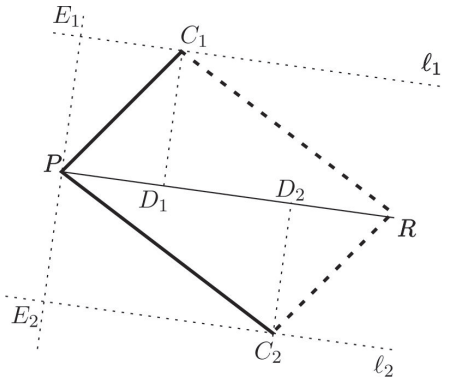
Но това е големината на диагонала на ромб със страна F и ъгъл 2γ – *валидността на правилото на успоредника в случай на равни по големина сили е доказано*.

Следващата стъпка е да разгледаме случая с неравни по големина ортогонални сили. Нека P е приложната точка на силите PC_1 и PC_2



Фиг. 2. Обяснението на Поасон за ортогонални, неравни по големина сили.

(Фиг. 2). Построяваме правоъгълника PC_2RC_1. Прекарваме диагоналите, които се пресичат в т. D. Построяваме през точките C_1 и C_2 правите ℓ_1, ℓ_2, успоредни на диагонала PR, а през т. P права, успоредна на диагонала C_2C_1, която пресича ℓ_1 в т. E_1 и съответно ℓ_2 в т. E_2. Точката D разполовява диагоналите, т.е. $DC_1 = DC_2 = PD$. От успоредността на ℓ_1 и ℓ_2 имаме, че $PE_1 = DC_1 = PD$ и $PE_2 = DC_2 = PD$. Сега силата PC_1 е резултантната на две равни по големина сили PD и PE_1 (PDC_1E_1 е ромб), а PC_2 е резултантната на другата двойка равни по големина сили PD и PE_2 (PDC_2E_2 е ромб). Следователно действието на силите PC_1 и PC_2 може да се замени с действието на четири сили: PE_2, PD, PE_1, PD. Но PE_1 и PE_2 се компенсират, тъй като са равни по големина, но с противоположни посоки. Окончателно резултантната сила на PC_1 и PC_2 е аритметичната сума $PD + PD = PR$, т.е. *отново получаваме правилото на успоредника*.



Фиг. 3. Обяснението на Поасон в общия случай.

Тази стратегия може да се приложи и към общия случай с произволни сили. Нека силите, представяни с PC_1 и PC_2, са приложени в т. P (Фиг. 3). Построяваме успоредника PC_2RC_1. Прекарваме правите ℓ_1 (ℓ_2) през т. C_1 (C_2), успоредно на диагонала PR, и през т. P права, перпендикулярна на PR, която пресича ℓ_1 (ℓ_2) в т. E_1 (E_2). Перпендикулярът от т. C_1 (C_2) пресича диагонала PR в т. D_1 (D_2). Сега $PD_1C_1R_1$ е правоъгълник и съгласно с предишния случай може да разглеждаме PC_1 като резултантна сила на PD_1 и PE_1. Аналогично PC_2 е резултантна сила на PD_2 и PE_2. Тоест търсената резултантна сила се получава от PE_1, PE_2, PD_1 и PD_2. Но триъгълниците C_1RD_1 и C_2PD_2 са еднакви и $C_1D_1 = C_2D_2$ или $PE_1 = PE_2$. Триъгълниците PD_1C_1 и C_2RD_2 са също еднакви, т.е. $PD_1 = D_2R$. Като отчетем, че силите PE_1 и PE_2 се уравновесват, за резултантната сила получаваме аритметичната сума $PD_2 + PD_1 = PD_2 + D_2R = PR$. *Правилото на успоредника е доказано*.

С изключение на първата стъпка, където правилото на успоредника се получава от съображения за симетрия, целият останал анализ е геометрия. За разлика от динамичното обяснение, в доказателството на Поасон няма физика. Силата се оказва чист математичен конструкт. На пръв поглед това изглежда абсурдно, но точно тази особеност ни позволява да прилагаме правилото на успоредника не само към преместванията, скоростите и ускоренията, но и към гравитационните, електричните и магнитните полета, към плътностите на тока, към енергетичните и ентропийните потоци и т.н., тоест към всички величини, които наричаме векторни.

Литература

[1] Encyclopædia Britannica: Simon Stevin.

[2] S.D. Poisson (1811) Traité de Mécanique. Vol. 1, pp. 11–19; Courcier, Paris.

[3] J.C. Maxwell (1873) A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. 1, p. 10; Clarendon Press, Oxford.